Introdução à teoria da medida – SMA0143

Sérgio Luís Zani
SMA – ICMC – USP

Sumário

Capítulo 1

Medida exterior e medida de Lebesgue

1.1 Álgebra e σ-álgebra

Se X é um conjunto, denotamos POR $\mathscr{P}(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, $\mathscr{P}(X) = \{A; A \subset X\}$.

Definição 1.1 *Seja X um conjunto. Uma classe $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X é uma álgebra em X se*

(i) $X \in \mathscr{F}$

(ii) $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \doteq X \setminus A \in \mathscr{F}$

(iii) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{F}$

Definição 1.2 *Seja X um conjunto. Uma classe $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra em X se*

(i') $X \in \mathscr{F}$

(ii') $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \doteq X \setminus A \in \mathscr{F}$

(iii') $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{F}$

Toda σ-álgebra $\mathscr{F}$ é uma álgebra pois se $A, B \in \mathscr{F}$, tomando a sequência $A_1 = A$ e $A_n = B$ se $n \geq 2$ então $A \cup B = \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{F}$.

Se A, B pertencem a uma álgebra $\mathscr{F}$ então $A^{\mathrm{c}}, B^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$. Logo $A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}} = (A \cap B)^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$. Portanto, $A \cap B = ((A \cap B)^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$. Em particular, $A \setminus B \doteq A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$. Da mesma forma se mostra que se $A_n, n \in \mathbb{N}$, pertencem a uma σ-álgebra $\mathscr{F}$ então $\cap_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{F}$.

Note que se $\mathscr{F}$ é uma álgebra em X então as condições *(i)* e *(ii)* implicam que $\varnothing \in \mathscr{F}$. O mesmo ocorre se $\mathscr{F}$ for uma σ-álgebra em X.

Se $\mathscr{F}$ é uma classe de subconjuntos de X então $\mathscr{F}$ é uma álgebra em X se e somente se valem *(ii)*, *(iii)* e $\mathscr{F} \neq \varnothing$. Basta ver que se $A \in \mathscr{F}$ então, por *(ii)*, $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$ e, por *(iii)*, $X = A \cup A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$. Analogamente, $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra em X se e somente se valem *(ii')*, *(iii')* e $\mathscr{F} \neq \varnothing$.

Exemplo 1.3 *Seja X um conjunto. O conjunto das partes de X, $\mathscr{P}(X)$, é uma σ-álgebra e o mesmo ocorre com $\mathscr{F} = \{\varnothing, X\}$. Estas são a maior e a menor σ-álgebras em X, respectivamente.*

Se $E \subset X$ então $\mathscr{F}_E = \{\varnothing, X, E, E^c\}$ é a menor σ-álgebra de X que contém E.

Proposição 1.4 *Sejam X um conjunto e $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$*

$$\Sigma = \{\mathscr{F}; \mathscr{F} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra e } \mathscr{C} \subset \mathscr{F}\}.$$

Então $\sigma(\mathscr{C}) = \cap_{\mathscr{F}\in\Sigma} \mathscr{F}$ é uma σ-álgebra satisfazendo

i) $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$;

ii) se $\mathscr{F}_0$ é uma σ-álgebra e $\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{C}$ então $\mathscr{F}_0 \supset \sigma(\mathscr{C})$.

Em outras palavras, $\sigma(\mathscr{C})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathscr{C}$.

Demonstração: Como $X \in \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{F} \in \Sigma$ então

$$X \in \cap_{\mathscr{F}\in\Sigma} \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}).$$

Se $A \in \sigma(\mathscr{C})$ então $A \in \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{F} \in \Sigma$. Logo, $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{F} \in \Sigma$, isto é,

$$A^{\mathrm{c}} \in \cap_{\mathscr{F}\in\Sigma} \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}).$$

Se $A_n \in \sigma(\mathscr{C})$, $n \in \mathbb{N}$, então $A_n \in \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{F} \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{F} \in \Sigma$, isto é,

$$\cup_{n\geq 1} A_n \in \cap_{\mathscr{F}\in\Sigma}\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}).$$

Portanto, $\sigma(\mathscr{C})$ é uma σ-álgebra.

Como $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{F} \in \Sigma$ então

$$\mathscr{C} \subset \cap_{\mathscr{F}\in\Sigma}\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}).$$

Finalmente, se $\mathscr{F}_0$ é uma σ-álgebra que contém $\mathscr{C}$ então $\mathscr{F}_0 \in \Sigma$. Logo,

$$\mathscr{F}_0 \supset \cap_{\mathscr{F}\in\Sigma}\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}).$$

□

A σ-álgebra $\sigma(\mathscr{C})$ é chamada de σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$.

Observação 1.5 *É claro que se $\mathscr{C}$ for uma σ-álgebra então $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.*

Exercício 1.6 *Se $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ então $\sigma(\mathscr{C}') \subset \sigma(\mathscr{C})$.*

Definição 1.7 *Sejam $X = \mathbb{R}$ e*

$$\mathscr{C} = \{(a,b); -\infty \leq a < b \leq +\infty\}.$$

A σ-álgebra $\sigma(\mathscr{C})$ é chamada de σ-álgebra de Borel e é denotada por $\mathscr{B}$; seus elementos são chamados de conjuntos de Borel ou borelianos.

Como todo aberto da reta se escreve como reunião (disjunta) enumerável (ou finita) de intervalos abertos, $\mathscr{B}$ contém todos os abertos de $\mathbb{R}$. Consequentemente, contém todos os fechados também.

Exemplo 1.8 *Seja*

$$\mathscr{C}' = \{[a,b]; -\infty < a < b < +\infty\}.$$

Como $\mathscr{C}' \subset \mathscr{B}$ segue que $\sigma(\mathscr{C}') \subset \sigma(\mathscr{B}) = \mathscr{B}$.

Por outro lado, se $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a < b$ *então*

$$(a, b) = \cup_{n\geq 2}\left[a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}\right] \in \sigma(\mathscr{C}'),$$

$$(a, +\infty) = \cup_{n\geq 2}\left[a + \frac{1}{n}, a + n\right] \in \sigma(\mathscr{C}')$$

e

$$(-\infty, b) = \cup_{n\geq 2}\left[b - n, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathscr{C}').$$

Também,

$$(-\infty, +\infty) = \cup_{n\geq 1}[-n, n] \in \sigma(\mathscr{C}').$$

Assim,

$$\mathscr{C} = \{(a, b); -\infty \leq a < b \leq +\infty\} \subset \sigma(\mathscr{C}').$$

Logo, $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}')$ *e, portanto,* $\sigma(\mathscr{C}') = \mathscr{B}$.

Exercício 1.9 *Mostre que cada uma das seguintes classes de subconjuntos da reta também gera a* σ*-álgebra de Borel.*

1. $\mathscr{C}_1 = \{(a, b]; -\infty \leq a < b < +\infty\}$
2. $\mathscr{C}_2 = \{[a, b); -\infty < a < b \leq +\infty\}$
3. $\mathscr{C}_3 = \{[a, +\infty); a \in \mathbb{R}\}$
4. $\mathscr{C}_4 = \{(a, +\infty); a \in \mathbb{R}\}$
5. $\mathscr{C}_5 = \{(-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}$
6. $\mathscr{C}_6 = \{(-\infty, a); a \in \mathbb{R}\}$
7. $\mathscr{C}_7 = \{A \subset \mathbb{R}; A \text{ é aberto }\}$
8. $\mathscr{C}_8 = \{F \subset \mathbb{R}; F \text{ é fechado }\}$
9. $\mathscr{C}_9 = \{K \subset \mathbb{R}; K \text{ é compacto }\}$

Proposição 1.10 *Sejam* X *um conjunto e* $\mathscr{F}$ *uma* σ*-álgebra em* X*. Se* $E_n \in \mathscr{F}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, então existem* $F_n \in \mathscr{F}$ *,* $n \in \mathbb{N}$*, tais que* $F_n \subset E_n$*,* $F_n \cap F_m = \varnothing$ *se* $n \neq m$ *satisfazendo* $\cup_{n\geq 1} E_n = \cup_{n\geq 1} F_n$.

Demonstração: Sejam $F_1 = E_1$ e, para $n \geq 2$, $F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$. Temos $F_n \in \mathscr{F}$ e $F_n \subset E_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $1 \leq n < m$ então

$$F_n \cap F_m \subset E_n \cap F_m = E_n \cap E_m \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap E_n^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap E_{m-1}^{\mathrm{c}} = \varnothing.$$

Como $E_n \supset F_n$ para todo $n \geq 1$, temos $\cup_{n\geq 1} E_n \supset \cup_{n\geq 1} F_n$.

Agora, se $x \in \cup_{n\geq 1} E_n$ então $x \in E_n$ para algum $n \geq 1$. Seja

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}; x \in E_n\}.$$

Se $n_0 = 1$ então $x \in E_1 = F_1$. Se $n_0 \geq 2$ então $x \in E_{n_0}$ mas $x \notin E_n$, para todo $n = 1, \ldots, n_0 - 1$, ou seja, $x \in F_{n_0}$.

Portanto, vale a igualdade $\cup_{n\geq 1} E_n = \cup_{n\geq 1} F_n$.

$\square$

1.2 O problema da medida na reta

Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ definimos $\ell(I)$ como o seu comprimento, isto é, $\ell(I) = \infty$ se I for ilimitado e $\ell(I) = b - a$ se a for seu extremo inferior e b seu extremo superior, $a \leq b$.

O problema de medida na reta é encontrar uma função m a valores reais estendidos não negativos, isto é, tomando valores em $[0, \infty]$ definida nos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. se $E_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos então $m(\cup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} m(E_n)$ (σ-aditividade);

2. se I é um intervalo então $m(I) = \ell(I)$;

3. se E é um conjunto e $x \in \mathbb{R}$ então $m(E + x) = m(E)$, sendo $E + x = \{y + x; y \in E\}$.

Este problema não tem solução se quisermos que o domínio de m seja $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, isto é, que seja possível medir qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$. Dessa forma, o que se procura é encontrar uma classe de subconjuntos de $\mathbb{R}$ para os quais as três condições acima sejam satisfeitas.

Da primeira condição acima resulta que se for possível medir uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos então também será possível medir a reunião destes subconjuntos. Dessa forma, precisamos que o domínio de uma tal função m que satisfaça a condição 1 seja fechado por reunião enumerável de seus elementos. Como as σ-álgebras têm esta propriedade, é natural que o domínio procurado seja uma classe de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ que tenha esta estrutura.

A segunda condição impõe que os intervalos estejam contidos na σ-álgebra que deve ser o domínio de m. Sendo assim, os conjuntos de Borel precisam estar contidos no domínio de m.

Num contexto mais geral, se tivermos um conjunto X e se $\mathscr{M}$ for uma σ-álgebra em X então uma medida em X definida na σ-álgebra $\mathscr{M}$ é uma função $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ que satisfaz

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. se $E_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos então $\mu(\cup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.

Note que dados $E_1, \dots, E_n \in \mathscr{M}$, dois a dois disjuntos, colocando $E_m = \varnothing$ se $m \geq n + 1$ então, como $\mu(\varnothing) = 0$,

$$\mu(\cup_{m=1}^n E_m) = \mu(\cup_{m=1}^\infty E_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) = \sum_{m=1}^{n} \mu(E_m).$$

Nestas notas vamos estudar apenas a medida de Lebesgue na reta, definida em uma σ-álgebra que contém os conjuntos borelianos (de modo próprio). Tal medida satisfará as três condições do problema acima.

No entanto, apresentamos o seguinte resultado para uma medida em geral.

Proposição 1.11 *Sejam X um conjunto, $\mathscr{M}$ uma σ-álgebra em que está definida uma medida μ. Temos*

1. *se* $A, B \in \mathscr{M}$*,* $A \subset B$ *então* $\mu(A) \leq \mu(B)$*;*

2. *se* $E_n \in \mathscr{M}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\mu(\cup_{n\geq 1} E_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.

A primeira propriedade é chamada de monotonicidade da medida enquanto que a segunda é chamada de σ-subaditividade.

Demonstração:

Para demonstrar a monotonicidade escreva $B = (B \setminus A) \cup A$ e note que esta reunião é disjunta de elementos de $\mathscr{M}$. Segue que

$$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A).$$

Agora, se $E_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$, então pela Proposição 1.10 existem $F_n \in \mathscr{M}$ dois a dois disjuntos tais que $F_n \subset E_n$ e $\cup_{n\geq 1} E_n = \cup_{n\geq 1} F_n$. Assim

$$\mu(\cup_{n\geq 1} E_n) = \mu(\cup_{n\geq 1} F_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n),$$

pela monotonicidade.

$\square$

1.3 Medida exterior de Lebesgue

Definição 1.12 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$*. A medida exterior de Lebesgue de* A *é definida como sendo*

$$m^*(A) = \inf\{\sum_n \ell(I_n); I_n \text{ é intervalo aberto e } A \subset \cup_n I_n\} \in [0, \infty].$$

A sequência de intervalos na definição acima pode ser finita ou infinita.

Proposição 1.13 *Temos*

1. *se* $A \subset B \subset \mathbb{R}$ *então* $m^*(A) \leq m^*(B)$ *(monotonicidade);*

2. $m^*(\varnothing) = 0$*;*

3. *se* $x \in \mathbb{R}$ *então* $m^*(\{x\}) = 0$ *(não singularidade);*

4. *se* $A_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *então* $m^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n m^*(A_n)$ *(σ-subaditividade);*

5. *se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável então* $m^*(A) = 0$.

Demonstração:

1. Sejam $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Seja $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos abertos que cobrem B, isto é, $B \subset \cup_n I_n$. Como $A \subset B$, estes intervalos também cobrem A. Assim, $m^*(A) \leq \sum_n \ell(I_n)$. Ou seja, $m^*(A)$ é uma cota inferior de
$$\{\sum_n \ell(I_n); I_n \text{ é intervalo aberto e } B \subset \cup_n I_n\}$$
e, portanto, $m^*(A) \leq m^*(B)$.

2. Dado $\varepsilon > 0$ temos $\varnothing \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ e, consequentemente, $0 \leq m^*(\varnothing) \leq \ell((-\varepsilon, \varepsilon)) = 2\varepsilon$. Portanto, $m^*(\varnothing) = 0$.

3. Seja $x \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ temos $\{x\} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ e, consequentemente, $0 \leq m^*(\{x\}) \leq \ell((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = 2\varepsilon$. Portanto, $m^*(\{x\}) = 0$.

4. Sejam $A_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se $m^*(A_m) = \infty$ para algum $m \in \mathbb{N}$ então a desigualdade o $m^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n m^*(A_n)$ é válida. Caso contrário, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ existe uma sequência finita ou enumerável de intervalos abertos $\mathscr{I}_n = \{I_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}_n}$ tal que
$$A_n \subset \cup_{i\in\mathbb{N}_n} I_i^{(n)} \quad \text{e} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \ell(I_i^{(n)}) < 2^{-n}\varepsilon + m^*(A_n)$$
sendo $\mathbb{N}_n$ um conjunto da forma $\{1, \ldots, N_n\} \subset \mathbb{N}$ se a sequência $\mathscr{I}_n$ for finita e $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}$ caso contrário.

   A sequência $\{I_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}_n, n\in\mathbb{N}}$ cobre $\cup_n A_n$. Assim,
$$m^*(\cup_n A_n) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}_n, n\in\mathbb{N}} \ell(I_i^{(n)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \ell(I_i^{(n)})$$

$$< \sum_{n\in\mathbb{N}}(2^{-n}\varepsilon + m^*(A_n)) = \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n),$$

Portanto, $m^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n m^*(A_n)$.

5. Se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável então $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

   Portanto,

$$m^*(A) = m^*(\cup_n \{x_n\}) \leq \sum_n m^*(\{x_n\}) = \sum_n 0 = 0.$$

□

Teorema 1.14 *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo então $m^*(I) = \ell(I)$.*

Demonstração:
Considere o caso em que $I = [a, b]$.
Dado $\varepsilon > 0$, segue de $I \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ que

$$m^*(I) \leq \ell((a-\varepsilon, b+\varepsilon)) = b - a + 2\varepsilon.$$

Portanto, $m^*(I) \leq b - a$.
Mostremos agora que $m^*(I) \geq b - a$.

Se $I_1, \ldots, I_n$ é uma cobertura finita de I por intervalos abertos e limitados então existe $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $J_1 \doteq I_{j_1} \doteq (a_1, b_1)$ satisfaz $a_1 < a < b_1$.

Se $b_1 > b$ então I_{j_1} cobre I, caso contrário, existe $j_2 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1\}$ tal que $J_2 \doteq I_{j_2} \doteq (a_2, b_2)$ satisfaz $a_2 < b_1 < b_2$. Repetindo este processo, como temos um número finito de intervalos I_j, obtemos uma subsequência $J_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, k$ de intervalos da sequência I_j, $j = 1, \ldots, n$ satisfazendo

$$a_1 < a < b_1, \quad a_j < b_{j-1} < b_j \quad \text{se } j = 2, \ldots, k \quad \text{e} \quad a_k < b < b_k.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} \ell(I_j) \geq \sum_{j=1}^{k} \ell(J_j) = \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j) = (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a_1)$$

$$= b_k - (a_k - b_{k-1}) - \cdots - (a_2 - b_1) - a_1 > b_k - a_1 > b - a = \ell(I),$$

ou seja, $\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j)$. Claramente esta desigualdade continua válida se algum dos I_j for ilimitado.

Seja agora uma sequência $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos que cobrem I. Como I é compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \subset \cup_{j=1}^{n} I_j$.

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j) \geq \ell(I) = b - a.$$

Portanto, $\ell(I) \leq m^*(I)$ e $m^*([a,b]) = b - a$.

Consideremos agora o caso em que I é um intervalo limitado com extremos a e b, $a < b$. Observe que $\overline{I} = [a,b]$.

Dado $0 < \varepsilon < b - a$, observe que

$$I_\varepsilon \doteq [a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2] \subset (a,b) \subset I$$

e

$$\ell(I_\varepsilon) = m^*(I_\varepsilon) = b - a - \varepsilon = \ell(I) - \varepsilon.$$

Portanto,

$$\ell(I) - \varepsilon = \ell(I_\varepsilon) = m^*(I_\varepsilon) \leq m^*(I) \leq m^*(\overline{I}) = \ell(\overline{I}) = \ell(I),$$

logo,

$$\ell(I) - \varepsilon \leq m^*(I) \leq \ell(I),$$

portanto, $m^*(I) = \ell(I)$.

Finalmente, se I é um intervalo ilimitado então dado $N > 0$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $J_{a,N} = [a, a+N] \subset I$. Logo, $m^*(I) \geq m^*(J_{a,N}) = N$. Assim, $m^*(I) = \infty = \ell(I)$.

□

Corolário 1.15 $[0,1]$ *é não enumerável.*

Demonstração:

Pela Proposição 1.13, se $[0,1]$ fosse enumerável teríamos $m^*([0,1]) = 0$. No entanto, $m^*([0,1]) = 1$.

□

A medida exterior de Lebesgue também é invariante por translação.

Teorema 1.16 *Se $E \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ então $m^*(E+x) = m^*(E)$.*

Demonstração:

Note que se $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de E por intervalos abertos então $\{I_n + x\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de $E + x$ por intervalos abertos de E.

Assim,

$$m^*(E+x) \leq \sum_n \ell(I_n + x) = \sum_n \ell(I_n)$$

e, portanto, $m^*(E+x) \leq m^*(E)$.

Segue que

$$m^*(E) = m^*((E+x) + (-x)) \leq m^*(E+x),$$

ou seja,

$$m^*(E) = m^*(E+x).$$

□

Proposição 1.17 *Se $E \subset \mathbb{R}$ então dado $\varepsilon > 0$ existe um aberto $\mathscr{O} \supset E$ tal que $m^*(\mathscr{O}) \leq m^*(E) + \varepsilon$. Em particular,*

$$m^*(E) = \inf\{m^*(\mathscr{O}); \mathscr{O} \supset E, \mathscr{O} \text{ aberto}\} \in [0, +\infty].$$

Demonstração:

Se $m^*(E) = \infty$ basta tomar $\mathscr{O} = \mathbb{R}$ pois $m^*(\mathscr{O}) = \ell(\mathbb{R})$.

Suponha que $m^*(E)$ seja finita.

Dado $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura de E por intervalos abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_n \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Seja $\mathscr{O} = \cup_n I_n$. $\mathscr{O}$ é aberto, contém E e

$$m^*(\mathscr{O}) = m^*(\cup_n I_n) \leq \sum_n \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon.$$

□

Definição 1.18 *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é da classe $\mathscr{G}_\delta$ ($A \in \mathscr{G}_\delta$), ou simplesmente, um conjunto $\mathscr{G}_\delta$ se existir uma sequência de abertos $\mathscr{O}_n \subset \mathbb{R}$ tal que $A = \cap_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n$.*

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é da classe $\mathscr{F}_\sigma$ ($A \in \mathscr{F}_\sigma$), ou simplesmente, um conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ se existir uma sequência de fechados $F_n \subset \mathbb{R}$ tal que $A = \cup_{n=1}^\infty F_n$.

Note que

- Todo aberto é $\mathscr{G}_\delta$ e todo fechado é um $\mathscr{F}_\sigma$.
- O complementar de um $\mathscr{G}_\delta$ é um $\mathscr{F}_\sigma$ e vice-versa.
- Como todo intervalo aberto é uma reunião enumerável de intervalos fechados (podemos tomar até mesmo intervalos compactos) e como todo subconjunto aberto da reta é uma reunião enumerável de intervalos abertos, segue que todo aberto é também um $\mathscr{F}_\sigma$.
- Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado então $F \in \mathscr{G}_\delta$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ o subconjunto
$$\mathscr{O}_n = \cup_{x\in F}(x - 1/n, x + 1/n)$$
é aberto e, claramente, $F \subset \cap_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n$.
Por outro lado, se $x \in \cap_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F$ satisfazendo $x \in (x_n - 1/n, x_n + 1/n)$. Segue que a sequência (x_n) converge para x. Como F é fechado, $x \in F$. Ou seja, $F = \cap_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n$.

Proposição 1.19 *Se $E \subset \mathbb{R}$ então existe $G \in \mathscr{G}_\delta$ tal que $E \subset G$ e $m^*(E) = m^*(G)$.*

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.17, existe um aberto $\mathscr{O}_n \supset E$ tal que $m^*(\mathscr{O}_n) \leq m^*(E) + 1/n$.

Seja $G = \cap_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n \in \mathscr{G}_\delta$. Claramente $E \subset G$ e
$$m^*(G) \leq m^*(\mathscr{O}_n) \leq m^*(E) + 1/n,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $m^*(G) \leq m^*(E)$ e, consequentemente, $m^*(G) = m^*(E)$. □

Vale a pena observar que existe $E \subset \mathbb{R}$ com $m^*(E) > 0$ tal que para todo subconjunto $F \subset E$ de classe $\mathscr{F}_\sigma$ tem-se $m^*(F) = 0$.

1.4 Conjuntos mensuráveis

Definição 1.20 *Dizemos que $E \subset \mathbb{R}$ é um conjunto Lebesgue mensurável – ou simplesmente mensurável – se para todo $A \subset \mathbb{R}$ valer*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Pela monotonicidade da medida exterior, sempre vale que

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Dessa forma, E é mensurável se e somente se para todo $A \subset \mathbb{R}$ valer que

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Por simetria da condição de mensurabilidade de um conjunto vemos que E é mensurável se e somente se seu complementar $E^{\mathrm{c}} = \mathbb{R} \setminus E$ for mensurável.

Vamos denotar por $\mathscr{M}$ a classe de todos os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$.

Como para todo $A \subset \mathbb{R}$ temos $A \cap \mathbb{R} = A$ e $A \setminus \mathbb{R} = \varnothing$, vemos que $\mathbb{R}$ é mensurável. Logo, $\varnothing$ também é mensurável.

Lema 1.21 *Todo conjunto com medida exterior nula é mensurável.*

Demonstração:

Seja $E \subset \mathbb{R}$ com medida exterior nula.

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Como $A \cap E \subset E$ e $A \cap E^{\mathrm{c}} \subset A$, segue da monotonicidade de m^* que

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq m^*(E) + m^*(A) = m^*(A).$$

$\square$

Proposição 1.22 *Se $E \in \mathscr{M}$ e $x \in \mathbb{R}$ então $E + x \in \mathscr{M}$.*

Demonstração:
Seja $A \subset \mathbb{R}$.
Vale que $A \cap (E + x) = (A - x) \cap E + x$. De fato,

$$y \in A \cap (E + x) \Leftrightarrow y \in A \text{ e } y \in E + x$$

$$\Leftrightarrow y \in A \text{ e } y - x \in E \Leftrightarrow y - x \in A - x \text{ e } y - x \in E$$
$$\Leftrightarrow y - x \in (A - x) \cap E \Leftrightarrow y \in (A - x) \cap E + x$$

Vejamos agora que $(E + x)^{\mathrm{c}} = E^{\mathrm{c}} + x$:

$$y \in (E + x)^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow y \neq z + x \text{ para todo } z \in E \Leftrightarrow y - x \neq z \text{ para todo } z \in E$$

$$\Leftrightarrow y - x \notin E \Leftrightarrow y - x \in E^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow y \in E^{\mathrm{c}} + x.$$

Segue que

$$A \cap (E + x)^{\mathrm{c}} = A \cap (E^{\mathrm{c}} + x) = (A - x) \cap E^{\mathrm{c}} + x$$

Finalmente, pelo Teorema 1.16 e pela mensurabilidade de E obtemos

$$m^*(A \cap (E + x)) + m^*(A \cap (E + x)^{\mathrm{c}})$$

$$= m^*((A - x) \cap E + x) + m^*((A - x) \cap E^{\mathrm{c}} + x)$$
$$= m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \cap E^{\mathrm{c}}) = m^*(A - x) = m^*(A).$$

□

Lema 1.23 *A reunião de dois conjuntos mensuráveis é mensurável.*

Demonstração:
Sejam $E, F \subset \mathbb{R}$ mensuráveis
Seja $A \subset \mathbb{R}$.
Como
$$A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F \cap E^{\mathrm{c}}),$$
temos
$$m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap (E \cup F)^{\mathrm{c}})$$

$$\begin{aligned}
&\leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F \cap E^c) + m^*(A \cap (E \cup F)^c) \\
&= m^*(A \cap E) + m^*((A \cap E^c) \cap F) + m^*((A \cap E^c) \cap F^c) \\
&= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A).
\end{aligned}$$

□

Corolário 1.24 *$\mathscr{M}$ é uma álgebra de conjuntos.*

Vamos mostrar que, na verdade, $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra.

Lema 1.25 *Sejam $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{M}$ tais que $E_i \cap E_j = \varnothing$, se $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

Se $A \subset \mathbb{R}$ então

$$m^*(A \cap [\cup_{i=1}^n E_i]) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i). \tag{1.26}$$

Em particular, $m^*(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n m^*(E_i)$. Ou seja, m^* é o que se chama de medida finitamente aditiva quando restrita aos conjuntos mensuráveis.

Demonstração:
A demonstração é por indução sobre $n \in \mathbb{N}$.
O caso $n = 1$ se reduz à identidade $m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$.
Suponha agora que $n \geq 2$ e que (1.26) seja válida para $n - 1$.
Como $E_i \cap E_j = \varnothing$, se $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, temos

$$A \cap [\cup_{i=1}^n E_i] \cap E_n = A \cap E_n$$

e

$$A \cap [\cup_{i=1}^n E_i] \cap E_n^c = A \cap [\cup_{i=1}^{n-1} E_i].$$

Como E_n é mensurável, utilizando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned}
m^*(A \cap [\cup_{i=1}^n E_i]) &= m^*(A \cap [\cup_{i=1}^n E_i] \cap E_n) + m^*(A \cap [\cup_{i=1}^n E_i] \cap E_n^c) \\
&= m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap [\cup_{i=1}^{n-1} E_i]) \\
&= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i).
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.27 *$\mathscr{M}$ é uma σ-ágebra.*

Demonstração:
Dados $E_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$, defina $F_1 = E_1$ e, para $n \geq 2$,

$$F_n = E_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} E_i.$$

Como $\mathscr{M}$ é uma álgebra, $F_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$, e pela Proposição 1.10 estes conjuntos são dois a dois disjuntos e $E \doteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.
Mostremos que $E \in \mathscr{M}$.
Coloque $G_n = \cup_{i=1}^{n} F_i$. É claro que $G_n \in \mathscr{M}$ e $G_n \subset G_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Como $G_n \subset E$, segue que $E^{\mathrm{c}} \subset G_n^{\mathrm{c}}$, $n \in \mathbb{N}$.
Seja $A \subset \mathbb{R}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$m^*(A) = m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap G_n^{\mathrm{c}}) \geq m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})$$

$$= m^*(A \cap [\cup_{i=1}^{n} F_i]) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

Portanto,

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

Pela σ-subaditividade de m^*

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})$$

$$\geq m^*(A \cap [\cup_{i=1}^{\infty} F_i]) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

ou seja, $E \in \mathscr{M}$.

$\square$

Mostremos que $\mathscr{M}$ contém $\mathscr{B}$, a σ-álgebra de Borel. Para isso, vejamos o seguinte

Lema 1.28 *Para todo $a \in \mathbb{R}$ o intervalo $(a, +\infty)$ é mensurável.*

Demonstração:

Dado $A \subset \mathbb{R}$ defina $A_1 = A \cap (a, +\infty)$ e $A_2 = A \cap (a, +\infty)^{\mathrm{c}} = A \cap (-\infty, a]$.

A fim de mostrar que $(a, +\infty)$ é mensurável basta mostrar que $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$.

No caso em que $m^*(A) = \infty$, a desigualdade é válida. Suponha agora que $m^*(A) < \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura enumerável de A formada por intervalos abertos I_n, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Coloque $I'_n = I_n \cap (a, +\infty)$ e $I''_n = I_n \cap (-\infty, a]$. Tanto I'_n quanto I''_n são intervalos (podendo algum ser vazio) disjuntos e $I_n = I'_n \cup I''_n$. Assim,

$$\ell(I_n) = \ell(I'_n) + \ell(I''_n) = m^*(I'_n) + m^*(I''_n).$$

Como $A_1 \subset \cup_{n=1}^{\infty} I'_n$ e $A_2 \subset \cup_{n=1}^{\infty} I''_n$ temos

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I''_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ell(I'_n) + \ell(I''_n))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Portanto, $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$.

$\square$

Teorema 1.29 $\mathscr{B} \subset \mathscr{M}$.

Demonstração:

Pelo Exercício Resolvido 1.9 basta mostrarmos que

$$\mathscr{C}' = \{[a, b]; -\infty < a < b < +\infty\} \subset \mathscr{M},$$

pois seguirá que $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C}') \subset \sigma(\mathscr{M}) = \mathscr{M}$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.
Como $(b, +\infty) \in \mathscr{M}$ e $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra então $(-\infty, b] \in \mathscr{M}$.
Como também

$$[a, +\infty) = \cap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n, +\infty) \in \mathscr{M},$$

resta observar que

$$[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, +\infty) = (-\infty, b] \cap (\cap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n, +\infty)) \in \mathscr{M}.$$

□

Teorema 1.30 *$\mathscr{M}$ é σ-aditiva sobre conjuntos mensuráveis, isto é, se $E_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$, são dois a dois disjuntos então*

$$m^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Demonstração:
Pelo Lema 1.25, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=1}^{m} m^*(E_n) = m^*(\cup_{n=1}^{m} E_n) \leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Como m^* é σ-subaditiva, a desigualdade acima é, de fato, uma igualdade.

□

Definição 1.31 *A restrição de m^* à σ-álgebra $\mathscr{M}$ é chamada de medida de Lebesgue e é denotada por m.*

Note que m satisfaz as condições 1, 2 e 3 do problema de medida na reta conforme enunciados na seção 1.2. Veremos na seção 1.7 que $\mathscr{M} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. No entanto, a medida exterior de Lebesgue satisfaz as condições 2 e 3, mas não satisfaz a condição 1 como veremos também na seção 1.7. Na verdade, veremos que m^* não é nem mesmo finitamente aditiva.

1.5 Propriedades de conjuntos mensuráveis

As próximas duas proposições dizem respeito ao comportamento da medida de Lebesgue – *grosso modo*, uma espécie de continuidade – com relação a sequências monótonas de conjuntos mensuráveis.

Proposição 1.32 *Seja (E_n) uma sequência decrescente (com relação à inclusão) de conjuntos mensuráveis. Se $m(E_1)$ é finita então*

$$m(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Demonstração:

Defina $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$ e $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 \setminus E$. De fato, se $x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ então $x \in F_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Como $F_{n_0} \subset E_{n_0} \subset E_1$, segue que $x \in E_1$ Como $x \notin E_{n_0+1}$ segue que $x \notin E$. Assim, $x \in E_1 \setminus E$. Portanto, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset E_1 \setminus E$.

Reciprocamente, se $x \in E_1 \setminus E$ então $x \in E_1$ e $x \notin E_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto, temos $n_0 \geq 2$. Se colocarmos

$$m = \min\{n \geq 2; x \notin E_n\}$$

temos $x \in E_{m-1} \setminus E_m$. Portanto, $x \in F_{m-1} \subset \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, ou seja, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \supset E_1 \setminus E$ e, portanto, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 \setminus E$.

Mostremos agora, que os conjuntos F_n são dois a dois disjuntos. De fato, se $n \neq m$, digamos $m < n$, então

$$F_n \cap F_m = E_n \cap E_{n+1}^{\mathrm{c}} \cap E_m \cap E_{m+1}^{\mathrm{c}} \subset E_{m+1} \cap E_{n+1}^{\mathrm{c}} \cap E_m \cap E_{m+1}^{\mathrm{c}} = \varnothing,$$

pois $E_n \subset E_{m+1}$ já que $m + 1 \leq n$.

Observe que devido ao fato de $E_n, E \subset E_1$ e $m(E_1) < \infty$ temos também que $m(E_n), m(E) < \infty$.

Agora, como

$$m(E_1) = m(E \,\dot{\cup}\, (E_1 \setminus E)) = m(E) + m(E_1 \setminus E)$$

e

$$m(E_n) = m(E_{n+1} \,\dot{\cup}\, (E_n \setminus E_{n+1})) = m(E_{n+1}) + m(E_n \setminus E_{n+1})$$

obtemos
$$m(E_1 \setminus E) = m(E_1) - m(E)$$
e
$$m(E_n \setminus E_{n+1}) = m(E_n) - m(E_{n+1}).$$

Assim, como m é σ-aditiva, temos
$$m(E_1) - m(E) = m(E_1 \setminus E) = m(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \setminus E_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} [m(E_n) - m(E_{n+1})]$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} [m(E_n) - m(E_{n+1})] = \lim_{N\to\infty} [m(E_1) - m(E_{N+1})]$$
$$= m(E_1) - \lim_{N\to\infty} m(E_{N+1}).$$

Portanto, como $m(E_1) < \infty$, $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

$\square$

Observação 1.33 *Note que a hipótese de $m(E_1)$ ser finita (ou que $m(E_{n_0}) < \infty$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$) não pode ser relaxada. De fato, se tomarmos $E_n = (n, +\infty)$, temos $E_{n+1} \subset E_n$, mas $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} \ell(E_n) = \infty$, enquanto que $m(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\varnothing) = 0$.*

Proposição 1.34 *Seja (E_n) uma sequência crescente (com relação à inclusão) de conjuntos mensuráveis. Então*
$$m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Demonstração:

Coloque $F_1 = E_1$ e, para $n \geq 2$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$.

Como $F_n \subset E_n$, $n \in \mathbb{N}$, segue que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Reciprocamente, se $x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ então $x \in F_{n_0}$ para algum $n_0 \geq 1$. Se $n_0 = 1$ então $x \in F_1 = E_1$.

Se $n_0 \geq 2$ então $x \in F_{n_0} = E_{n_0} \setminus E_{n_0-1} \subset E_{n_0}$. Em todo caso, $x \in \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Portanto, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Também, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\cup_{n=1}^{N} F_n = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \cdots \cup (E_N \setminus E_{N-1}) = E_N.$$

Observe que como (E_n) é uma sequência crescente, (E_n^{c}) é decrescente.

Se $n \geq 2$ então

$$F_1 \cap F_n = E_1 \cap E_n \cap E_{n-1}^{\mathrm{c}} \subset E_1 \cap E_n \cap E_1^{\mathrm{c}} = \varnothing.$$

Agora, se $2 \leq m < n$ então

$$F_n \cap F_m = E_n \cap E_{n-1}^{\mathrm{c}} \cap E_m \cap E_{m-1}^{\mathrm{c}} \subset E_n \cap E_{n-1}^{\mathrm{c}} \cap E_{n-1} \cap E_{m-1}^{\mathrm{c}} = \varnothing,$$

pois $E_m \subset E_{n-1}$ já que $m \leq n-1$.

Ou seja, os conjuntos F_n são dois a dois disjuntos.

Assim,

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(F_n) = \lim_{N\to\infty} m(\cup_{n=1}^{N} F_n) = \lim_{N\to\infty} m(E_N).$$

□

A próxima proposição apresenta caracterizações de conjuntos mensuráveis. Duas destas caracterizações dizem que para um conjunto ser mensurável é equivalente que ele seja bem aproximado externamente por abertos ou internamente por fechados, no sentido de que o conjunto da diferença entre o aberto e o conjunto dado ou entre o conjunto dado e o fechado possa ter medida exterior arbitrariamente pequena. As outras duas condições dizem que um conjunto mensurável nada mais é do que um conjunto da classe $\mathscr{G}_\delta$ menos um conjunto de medida nula ou um conjunto da classe $\mathscr{F}_\sigma$ reunido com um conjunto de medida nula.

Proposição 1.35 *Seja $E \subset \mathbb{R}$. São equivalentes*

1. *E é mensurável;*

2. *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um aberto* $\mathscr{O}$ *contendo* E *tal que* $m^*(\mathscr{O} \setminus E) < \varepsilon$*;*

3. *existe um conjunto* G *da classe* $\mathscr{G}_\delta$ *contendo* E *tal que* $m^*(G \setminus E) = 0$*; equivalentemente, existe um conjunto* G *da classe* $\mathscr{G}_\delta$ *contendo* E *e* Z *com medida nula tal que* $E = G \setminus Z$*;*

4. *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um fechado* F *contido em* E *tal que* $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$*;*

5. *existe um conjunto* F *da classe* $\mathscr{F}_\sigma$ *contido em* E *tal que* $m^*(E \setminus F) = 0$*; equivalentemente, existe um conjunto* F *da classe* $\mathscr{F}_\sigma$ *contido em* E *e* Z *com medida nula tal que* $E = F \cup Z$*.*

Demonstração:

(*1* $\Rightarrow$ *2*) Suponhamos primeiramente que E tenha medida finita. Sabemos (Proposição 1.17) que dado $\varepsilon > 0$ existe um aberto $\mathscr{O}_\varepsilon \supset E$ tal que $m^*(\mathscr{O}_\varepsilon) < m^*(E) + \varepsilon$. Como $\mathscr{O}_\varepsilon$ (boreliano) e E são mensuráveis podemos trocar m^* por m.

Como $\mathscr{O}_\varepsilon = (\mathscr{O}_\varepsilon \setminus E) \dot{\cup} E$ e $m(E) < \infty$, segue da aditividade de m que

$$m(\mathscr{O}_\varepsilon \setminus E) = m(\mathscr{O}_\varepsilon) - m(E) < \varepsilon,$$

o que prova o resultado no caso em que E tenha medida finita.

Colocando $E_n = E \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $E_n \in \mathscr{M}$ tem medida finita. Logo, pelo que acabamos de demonstrar, existe aberto $\mathscr{O}_n \supset E_n$ tal que $m(\mathscr{O}_n \setminus E_n) < \varepsilon 2^{-n}$.

Colocando $\mathscr{O} = \cup_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n$, vemos que $\mathscr{O}$ é aberto e

$$\mathscr{O} \supset \cup_{n=1}^\infty E_n = \cup_{n=1}^\infty E \cap [-n, n] = E.$$

Como

$$\mathscr{O} \setminus E = \cup_{n=1}^\infty \mathscr{O}_n \setminus \cup_{m=1}^\infty E_m \subset \cup_{n=1}^\infty (\mathscr{O}_n \setminus E_n)$$

segue que

$$m(\mathscr{O} \setminus E) \leq m(\cup_{n=1}^\infty (\mathscr{O}_n \setminus E_n)) \leq \sum_{n=1}^\infty m(\mathscr{O}_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^\infty \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.$$

(*2* $\Rightarrow$ *3*) Para cada $n \in \mathbb{N}$, por hipótese, existe um aberto $\mathscr{O}_n \supset E$ tal que $m^*(\mathscr{O}_n \setminus E) < 1/n$.

Seja $G = \cap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$. É claro que $G \in \mathscr{G}_\delta$ e $G \supset E$. Além do mais, como $G \setminus E \subset \mathscr{O}_n \setminus E$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq m^*(G \setminus E) \leq m^*(\mathscr{O}_n \setminus E) < 1/n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $m^*(G \setminus E) = 0$.

Note que se colocarmos $Z = G \setminus E$ vemos que $m^*(Z) = 0$ e

$$G \setminus Z = G \setminus (G \setminus E) = G \cap (G \cap E^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = G \cap (G^{\mathrm{c}} \cup E)$$

$$= (G \cap G^{\mathrm{c}}) \cup (G \cap E) = \varnothing \cup E = E.$$

Reciprocamente, se existe um conjunto G da classe $\mathscr{G}_\delta$ contendo E e Z com medida nula tal que $E = G \setminus Z$ então

$$G \setminus E = G \cap (G \cap Z^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = G \cap (G^{\mathrm{c}} \cup Z) = G \cap Z$$

e, portanto, $m^*(G \setminus E) = m(G \setminus E) = 0$.

(*3* $\Rightarrow$ *1*) Se $G \in \mathscr{G}_\delta$ satisfaz $G \supset E$ e $m^*(G \setminus E) = 0$ então, como acima, colocando $Z = G \setminus E$ temos $E = G \setminus Z = G \cap Z^{\mathrm{c}} \in \mathscr{M}$ pois G é mensurável por ser boreliano e, como Z tem medida exterior nula, é mensurável e, portanto, Z^{c} também.

(*1* $\Rightarrow$ *4*) Como $E \in \mathscr{M}$ então $E^{\mathrm{c}} \in \mathscr{M}$. Como vale o item *2*, dado $\varepsilon > 0$, existe aberto $\mathscr{O} \supset E^{\mathrm{c}}$ satisfazendo $m(\mathscr{O} \setminus E^{\mathrm{c}}) < \varepsilon$.

Coloque $F = \mathscr{O}^{\mathrm{c}}$. F é fechado e contido em E.

Notando que

$$\mathscr{O} \setminus E^{\mathrm{c}} = \mathscr{O} \cap E = E \setminus \mathscr{O}^{\mathrm{c}} = E \setminus F$$

obtemos $m(E \setminus F) = m(\mathscr{O} \setminus E^{\mathrm{c}}) < \varepsilon$.

(*4* $\Rightarrow$ *5*) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome um fechado $F_n \subset E$ tal que $m^*(E \setminus F_n) < 1/n$.

Seja $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Claramente, $F \in \mathscr{F}_\sigma$, $F \subset E$ e $E \setminus F \subset E \setminus F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Segue que $m^*(E \setminus F) \leq m^*(E \setminus F_n) < 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $m^*(E \setminus F) = 0$.

Se existe um conjunto F da classe $\mathscr{F}_\sigma$ contido em E e Z com medida nula tal que $E = F \cup Z$ então

$$E \setminus F = (F \cup Z) \cap F^{\mathrm{c}} = Z \setminus F$$

e, portanto, $m^*(E \setminus F) = m(E \setminus F) = 0$.

Note que se colocarmos $Z = E \setminus F$ vemos que $m^*(Z) = 0$ e

$$F \cup Z = F \cup (E \setminus F) = F \cup (E \cap F^{\mathrm{c}})$$

$$= (F \cup E) \cap (F \cup F^{\mathrm{c}}) = E \cap \mathbb{R} = E.$$

(*5* $\Rightarrow$ *1*) Se $F \in \mathscr{F}_\sigma$ satisfaz $F \subset E$ e $m^*(E \setminus F) = 0$ então, como acima, colocando $Z = E \setminus F$ temos $E = F \cup Z \in \mathscr{M}$ pois F é mensurável por ser boreliano e, como Z tem medida exterior nula, é mensurável.

$\square$

A próxima proposição apresenta uma caracterização de mensurabilidade para conjuntos que têm medida exterior finita. Este resultado será utilizado mais adiante quando formos aproximar determinadas funções por funções mais simples ou mais regulares.

Antes de enunciá-lo lembremos que a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B é definida por $A \Delta B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Proposição 1.36 *Se $E \subset \mathbb{R}$ tem medida exterior finita então $E \in \mathscr{M}$ se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos disjuntos e limitados $I_1, \ldots, I_n$ tais que*

$$m^*(E \Delta \cup_{i=1}^n I_i) < \varepsilon.$$

Demonstração:

Suponha que E seja mensurável.

Seja $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 1.35 existe um aberto $\mathscr{O} \supset E$ tal que $m(\mathscr{O} \setminus E) < \varepsilon/2$. Como $\mathscr{O}$ é aberto, existe uma quantidade no máximo enumerável de intervalos abertos I_i dois a dois disjuntos, que denotaremos por I_i, $i \in \mathbb{N}'$, sendo $\mathbb{N}'$ igual a $\mathbb{N}$ ou $\{1, \ldots, N\}$ para algum $N \in \mathbb{N}$, tal que $\mathscr{O} = \cup_{i \in \mathbb{N}'} I_i$.

Como E e $\mathscr{O} \setminus E$ têm medida finita e $m(\mathscr{O}) = m(E) + m(\mathscr{O} \setminus E)$, segue que $m(\mathscr{O})$ também é finita. Por outro lado,

$$m(\mathscr{O}) = m(\cup_{i \in \mathbb{N}'} I_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}'} m(I_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}'} \ell(I_i) < \infty, \tag{1.37}$$

o que implica que os intervalos I_i têm comprimento finito, sendo, portanto, limitados.

No caso em que $\mathbb{N}' = \{1, \ldots, N\}$ temos

$$m(E \Delta \cup_{i=1}^{N} I_i) = m(E \Delta \mathscr{O}) \leq m(E \setminus \mathscr{O}) + m(\mathscr{O} \setminus E) < 0 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Suponha agora que $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$. Por (1.37), a série $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$ é convergente. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \ell(I_i) < \varepsilon/2$.

Temos

$$\begin{aligned} m(E \Delta \cup_{i=1}^{n} I_i) &\leq m(E \setminus \cup_{i=1}^{n} I_i) + m(\cup_{i=1}^{n} I_i \setminus E) \\ &\leq m(\mathscr{O} \setminus \cup_{i=1}^{n} I_i) + m(\mathscr{O} \setminus E) = m(\cup_{i=n+1}^{\infty} I_i) + m(\mathscr{O} \setminus E) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \ell(I_i) + m(\mathscr{O} \setminus E) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos disjuntos e limitados $I_1, \ldots, I_n$ tais que

$$m^*(E \Delta \cup_{i=1}^{n} I_i) < \varepsilon/3.$$

Pela definição de medida exterior, existe aberto $\mathscr{O} \supset E$ tal que

$$m(\mathscr{O}) \leq m^*(E) + \varepsilon/3. \tag{1.38}$$

Mostremos que $m^*(\mathscr{O} \setminus E) < \varepsilon$.

Colocando $\mathscr{U} = \mathscr{O} \cap \cup_{i=1}^{n} I_i = \cup_{i=1}^{n} (I_i \cap \mathscr{O})$, temos

$$\mathscr{U} \Delta E = (\mathscr{U} \setminus E) \cup (E \setminus \mathscr{U}) \subset (\cup_{i=1}^{n} I_i \setminus E) \cup (E \setminus \mathscr{U}) \tag{1.39}$$

e

$$E \setminus \mathscr{U} = E \cap (\mathscr{O} \cap \cup_{i=1}^{n} I_i)^{\mathrm{c}} = E \cap [\mathscr{O}^{\mathrm{c}} \cup (\cup_{i=1}^{n} I_i)^{\mathrm{c}}]$$

$$= (E \cap \mathscr{O}^{\mathrm{c}}) \cup (E \cap (\cup_{i=1}^{n} I_i)^{\mathrm{c}}) = E \cap (\cup_{i=1}^{n} I_i)^{\mathrm{c}} = E \setminus (\cup_{i=1}^{n} I_i). \tag{1.40}$$

Combinando (1.39) e (1.40) chegamos a

$$m^*(\mathscr{U} \Delta E) \le m^*((\cup_{i=1}^{n} I_i \setminus E) \cup (E \setminus (\cup_{i=1}^{n} I_i))$$

$$= m^*(E \Delta \cup_{i=1}^{n} I_i) < \varepsilon/3. \tag{1.41}$$

Note que

$$E = \mathbb{R} \cap E = (\mathscr{U} \cup \mathscr{U}^{\mathrm{c}}) \cap E = (\mathscr{U} \cap E) \cup (\mathscr{U}^{\mathrm{c}} \cap E) \subset \mathscr{U} \cup (\mathscr{U} \Delta E).$$

Assim,

$$m^*(E) \le m^*(\mathscr{U}) + \varepsilon/3. \tag{1.42}$$

Ainda,

$$\mathscr{O} \setminus E = (\mathscr{O} \setminus E) \cap \mathbb{R} = (\mathscr{O} \setminus E) \cap (\mathscr{U} \cup \mathscr{U}^{\mathrm{c}}) = [(\mathscr{O} \setminus E) \cap \mathscr{U}] \cup [(\mathscr{O} \setminus E) \cap \mathscr{U}^{\mathrm{c}})]$$

$$= [\mathscr{O} \cap E^{\mathrm{c}} \cap \mathscr{U}] \cup [(\mathscr{O} \setminus E) \cap \mathscr{U}^{\mathrm{c}}] \subset (E^{\mathrm{c}} \cap \mathscr{U}) \cup (\mathscr{O} \cap \mathscr{U}^{\mathrm{c}})$$

$$\subset (\mathscr{U} \Delta E) \cup (\mathscr{O} \setminus \mathscr{U}). \tag{1.43}$$

Como $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}$, $m(\mathscr{U}) \le m^*(E) + \varepsilon/3$, ou seja, $\mathscr{U}$ tem medida finita. Logo,

$$m(\mathscr{O} \setminus \mathscr{U}) = m(\mathscr{O}) - m(\mathscr{U}). \tag{1.44}$$

Portanto, por (1.43), (1.41), (1.44), (1.38) e (1.42), finalmente obtemos

$$m^*(\mathscr{O} \setminus E) \le m^*(\mathscr{U} \Delta E) + m(\mathscr{O} \setminus \mathscr{U}) < \varepsilon/3 + m(\mathscr{O}) - m(\mathscr{U})$$

$$< 2\varepsilon/3 + m^*(E) - m(\mathscr{U}) < \varepsilon.$$

□

1.6 O conjunto de Cantor

Já vimos que todo conjunto enumerável tem medida nula. O conjunto de Cantor é um exemplo de conjunto não enumerável que tem medida nula. Uma vez demonstrado que o conjunto de Cantor tem estas duas propriedades seguirá que a cardinalidade dos conjunto mensuráveis é igual à cardinalidade do conjunto das partes de $\mathbb{R}$.

A ideia da construção do conjunto de Cantor é ir retirando determinados intervalos abertos do intervalo $[0,1]$ de modo que o comprimento do intervalo retirado seja igual a um terço do intervalo do qual foi subtraído. O conjunto residual será o conjunto de Cantor.

Vejamos como proceder

$$C_0 = \underbrace{[0,1]}_{I_1^0}, \quad \ell(I_1^0) = 1$$

$$C_1 = \underbrace{[0,\frac{1}{3}]}_{I_1^1}, \cup \underbrace{[\frac{2}{3},1]}_{I_2^1}, \quad \ell(I_j^1) = \frac{1}{3}\, j = 1,2.$$

$$C_2 = \underbrace{[0,\frac{1}{3^2}]}_{I_1^2} \cup \underbrace{[\frac{2}{3^2},\frac{1}{3}]}_{I_2^2} \cup \underbrace{[\frac{2}{3},\frac{7}{3^2}]}_{I_3^2} \cup \underbrace{[\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2},1]}_{I_4^2}, \quad \ell(I_j^2) = \frac{1}{3^2},\ j = 1,\dots,4.$$

Defina $I_1^0 \doteq [a_{0,1}, b_{0,1}] = [0,1]$ e suponha que para $k \geq 1$ tenhamos definidos intervalos $I_j^k = [a_{k,j}, b_{k,j}]$, $j = 1,\dots,2^k$, contidos em $[0,1]$ de modo que $\ell(I_j^k) = 3^{-k}$, $j = 1,\dots,2^k$, $b_{k,j} < a_{k,j+1}$, $j = 1,\dots,2^k - 1$.

Suponha ainda que $a_{k,j}$, para $k \geq 1$, seja da seguinte forma

$$a_{k,j} = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_{n,j}}{3^n}, \quad \text{com } c_{n,j} \in \{0,2\}.$$

Coloque $C_k = \cup_{j=1}^{2^k} I_j^k$. Observe que esta reunião é disjunta, C_k é compacto e $m(C_k) = (2/3)^k$.

Indutivamente definimos os intervalos I_i^{k+1}, $i = 1,\dots,2^{k+1}$ da seguinte forma:

- se $i = 2j - 1$ para algum $j = 1, \ldots, 2^k$, coloque

$$I_{2j-1}^{k+1} = [a_{k,j}, a_{k,j} + 3^{-k-1}] \doteq [a_{k+1,i}, b_{k+1,i}];$$

- se $i = 2j$ para algum $j = 1, \ldots, 2^k$, coloque

$$I_{2j}^{k+1} = [a_{k,j} + 2 \cdot 3^{-k-1}, b_{k,j}] \doteq [a_{k+1,i}, b_{k+1,i}].$$

Note que $\ell(I_{2j-1}^{k+1}) = 3^{-k-1}$ e

$$\ell(I_{2j}^{k+1}) = b_{k,j} - a_{k,j} - 2 \cdot 3^{-k-1} = 3^{-k} - 2 \cdot 3^{-k-1} = 3^{-k-1}.$$

Agora, se $i = 2j - 1$ então, colocando $c_{n,j} = c_{n,i}$, $n = 1, \ldots, k$ e $c_{k+1,i} = 0$,

$$a_{k+1,i} = a_{k,j} = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_{n,j}}{3^n} + \frac{0}{3^{k+1}} = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{c_{n,i}}{3^n}, \quad \text{com } c_{n,i} \in \{0, 2\}.$$

Por outro lado, se $i = 2j$ então, colocando $c_{n,j} = c_{n,i}$, $n = 1, \ldots, k$ e $c_{k+1,i} = 2$,

$$a_{k+1,i} = a_{k,j} + 2 \cdot 3^{-k-1} = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_{n,j}}{3^n} + \frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{c_{n,i}}{3^n}, \quad \text{com } c_{n,i} \in \{0, 2\}.$$

Isto termina o processo indutivo de definição dos intervalos I_i^k, $i = 1, \ldots, 2^k$.

Note que se $a = 0$ ou $a = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^n}$, com $c_n \in \{0, 2\}$, então $a = a_{k,j}$ para algum $j = 1, \ldots, 2^k$. De fato, é claro que $0 = a_{0,1}$ e se $k = 1$ então $a = 0$ ou $a = 2/3$, ou seja, $a = a_{0,1}$ ou $a = a_{1,2}$, respectivamente. Suponha que o resultado seja válido para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $a = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{c_n}{3^n}$, com $c_n \in \{0, 2\}$ então

$$a = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^n} + \frac{c_{k+1}}{3^{k+1}} = a_{k,j} + \frac{c_{k+1}}{3^{k+1}}$$

para algum $j = 1, \ldots, 2^k$. Se $c_{k+1} = 0$ então $a = a_{k,j} = a_{k+1,2j-1}$ e se $c_{k+1} = 2$ então $a = a_{k,j} + 2 \cdot 3^{-k-1} = a_{k+1,2j}$.

O conjunto de cantor é definido por $C \doteq \cap_{k=1}^{\infty} C_k$, logo, compacto e como $m(C) \leq m(C_k) = (2/3)^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $m(C) = 0$.

O conjunto dos extremos dos intervalos I_j^k, definido por $\mathscr{E} = \cup_{k=0}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^k} \{a_{k,j}, b_{k,j}\}$ é enumerável e está contido em C. Mostremos que $\mathscr{E}$ é denso em C. Dado $x \in C$, $x \in C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, existe uma sequência de intervalos $I_{j_k}^k$ tal que $x \in I_{j_k}^k$. Como $\lim_{k \to \infty} \ell(I_{j_k}^k) = 0$ segue que $x = \lim_{k \to \infty} a_{k,j_k}$.

Mostremos que C é não enumerável.

Primeiramente, note que se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n}, \qquad \text{com } c_n, d_n \in \{0, 2\} \tag{1.45}$$

então $c_n = d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, coloque $D = \{n \in \mathbb{N}; c_n \neq d_n\}$ e suponha que $D \neq \varnothing$.

Seja $m = \min D$. Portanto, $c_m \neq d_m$. Podemos supor que $c_m = 2$ e $d_m = 0$. De (1.45) segue que

$$\frac{2}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \leq 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$
$$= \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^m}.$$

Portanto,

$$0 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^m} - \frac{2}{3^m} = -\frac{1}{3^m} < 0,$$

um absurdo.

Seja $\mathscr{D}$ o conjunto das sequências (d_n) com $d_n = 0$ ou $d_n = 1$. O conjunto $\mathscr{D}$ é não enumerável. Pode-se mostrar isto usando o método da diagonal de Cantor ou usando expansão dos números reais na base binária. O método da diagonal funciona do seguinte modo: suponha que $\mathscr{D}$ seja enumerável, isto é,

$$\mathscr{D} = \{d^k = (d_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}, d_{n,k} \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}\}$$

Considere a sequência $d = (1 - d_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Claramente, $d \in \mathscr{D}$. Logo, $d = d^k = (d_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ para alguma $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $1 - d_{k,k} = d_{k,k}$, isto é, $d_{k,k} = 1/2$, um absurdo.

Seja

$$E = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}; c_n \in \{0,2\}\}.$$

Note que $E \subset \overline{\mathscr{E}}$.

Defina $\varphi : E \to \mathscr{D}$ por $\varphi(\sum_{n=1}^{\infty} c_n/3^n) = (c_n/2)$.

Dada $d = (d_n) \in \mathscr{D}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2d_n/3^n \in E$ e $\varphi(x) = d$, ou seja, φ é sobrejetora. Portanto, $\#\mathbb{R} = \#\mathscr{D} \leq \#E \leq \#\mathbb{R}$ ($\#$ denota cardinalidade). Como $E \subset \overline{\mathscr{E}} = C$, $\#C = \#\mathbb{R}$.

Corolário 1.46 *$\#\mathscr{M} = 2^c$, sendo $c = \#\mathbb{R}$.*

Demonstração: Temos $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Como

$$\#\mathscr{P}(C) = \#\mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^c,$$

segue que $\#\mathscr{M} = 2^c$.

$\square$

Corolário 1.47 *Seja $\mathscr{Z} = \{Z \subset \mathbb{R}; m(Z) = 0\}$. Então $\#\mathscr{Z} = 2^c$.*

Demonstração: Note que se $Z \subset C$ então $m(Z) = 0$, logo $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{Z}$. Temos

$$2^c = \#\mathscr{P}(C) \leq \#\mathscr{Z} \leq \#\mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^c.$$

$\square$

Note que pela Proposição 1.35 um conjunto mensurável é da forma $F \cup Z$, sendo F um conjunto boreliano (de classe $\mathscr{F}_\sigma$) e Z com medida nula. Pode-se mostrar que a cardinalidade dos conjuntos borelianos é apenas $c = \#\mathbb{R}$.

Exemplo 1.48 *Vimos na construção do conjunto de Cantor que o conjunto $\mathscr{E}$ formado pelos extremos dos intervalos I_j^k está contido em C. No entanto, $\mathscr{E}$ é enumerável enquanto que C não é.*

Considere a sequência (c_n) sendo $c_n = 0$ se n for ímpar e $c_n = 2$ caso contrário. Assim $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} \in \overline{\mathscr{E}} \subset C$. Temos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = 2 \cdot \frac{1/9}{1 - 1/9} = \frac{1}{4}.$$

Note que um elemento de $\mathscr{E}$ é da forma $\sum_{n=1}^{k} c_n 3^{-n}$, $c_n \in \{0,2\}$, caso seja algum $a_{k,j}$, ou $\sum_{n=1}^{k} d_n 3^{-n} + 3^{-k}$, $d_n \in \{0,2\}$, caso seja algum $b_{k,j}$. Claramente, $1/4$ não é igual a nenhum $a_{k,j}$. Também não é igual a nenhum $b_{k,j}$ pois

$$\sum_{n=1}^{k} d_n 3^{-n} + 3^{-k} = \sum_{n=1}^{k} d_n 3^{-n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n}.$$

Dessa forma, $1/4 \in C \setminus \mathscr{E}$.

1.7 Conjunto não mensurável

Vamos mostrar que existem conjuntos que não são mensuráveis na reta e que todo subconjunto com medida exterior de Lebesgue positiva possui um subconjunto não mensurável.

As notas a seguir são baseadas no livro *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis* de Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund, CRC Press, Nov 1, 1977 - Mathematics - 288 páginas.

Lema 1.49 *Seja $E \in \mathscr{M}$ tal que $m(E) > 0$. Então o conjunto das diferenças $\mathscr{D}_E = \{x - y; x, y \in E\}$ contém um intervalo centrado na origem.*

Demonstração: Suponha primeiramente que $0 < m(E) < \infty$.

Existe um aberto G contendo E tal que

$$m(G) < m(E) + \frac{1}{3}m(E) = \frac{4}{3}m(E).$$

Como G é aberto, existem intervalos abertos disjuntos I_n, $n \in \mathbb{N}$ (ou apenas uma quantidade finita), tais que

$$G = \cup_{n \geq 1} I_n.$$

Temos

$$m(G) = \sum_{n \geq 1} m(I_n) < \frac{4}{3}m(E). \tag{1.50}$$

Note que estes intervalos são limitados pois a medida de G é finita.

Coloque $E_n = E \cap I_n$. Estes conjuntos são mensuráveis e dois a dois disjuntos. Além disso,

$$\cup_{n\geq 1} E_n = \cup_{n\geq 1} E \cap I_n = E \cap \cup_{n\geq 1} I_n = E \cap G = E$$

Logo,

$$m(E) = m(\cup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} m(E_n) = \sum_{n\geq 1} m(E \cap I_n). \tag{1.51}$$

Segue de (1.50) e (1.51) que

$$\sum_{n\geq 1} m(I_n) < \frac{4}{3} \sum_{n\geq 1} m(E \cap I_n)$$

e, portanto, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$m(I_{n_0}) < \frac{4}{3} m(E \cap I_{n_0}) = \frac{4}{3} m(E_{n_0}).$$

Seja I o intervalo aberto $(-\frac{1}{2}m(I_{n_0}), \frac{1}{2}m(I_{n_0}))$.

Afirmação: se $d \in I$ então $E_{n_0} \cap (E_{n_0} + d) \neq \varnothing$.

De fato, se não fosse assim, como E_{n_0} e $E_{n_0} + d$ são mensuráveis, teríamos

$$m(E_{n_0} \cup (E_{n_0} + d)) = m(E_{n_0}) + m(E_{n_0} + d) = 2m(E_{n_0}).$$

Note que

$$E_{n_0} \cup (E_{n_0} + d) \subset I_{n_0} \cup (I_{n_0} + d) \subset J,$$

em que J é um intervalo de comprimento menor ou igual a $m(I_{n_0}) + |d|$. Para ver isto, basta escrever o fecho $\overline{I_{n_0}} = [a, b]$ e tomar $J \doteq [a, b + d]$ se $d \geq 0$ ou $J \doteq [a + d, b]$ se $d < 0$.

Segue que

$$2m(E_{n_0}) \leq m(J) \leq m(I_{n_0}) + |d| < m(I_{n_0}) + \frac{1}{2} m(I_{n_0}) = \frac{3}{2} m(I_{n_0})$$
$$< \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} m(E_{n_0}) = 2m(E_{n_0}),$$

um absurdo.

Assim, para todo $d \in I$ existe $y \in E_{n_0} \cap (E_{n_0} + d)$, ou seja,

$$\begin{cases} y \in E_{n_0} \subset E \\ y = x + d, \text{ para algum } x \in E_{n_0} \subset E \end{cases},$$

isto, é $d = y - x \in \mathscr{D}_E$. Portanto, $I \subset \mathscr{D}_E$.

Suponha agora que $m(E) = \infty$. Como $E = \cup_{n\geq 1} E \cap [-n, n]$, temos $\infty = m(E) \leq \sum_{n\geq 1} m(E \cap [-n, n])$. Assim, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, temos $0 < m(E \cap [-n_0, n_0])$. Por outro lado, $m(E \cap [-n_0, n_0]) \leq 2n_0$ e, pelo que já foi demonstrado, existe um intervalo aberto centrado na origem I tal que

$$I \subset \mathscr{D}_{E\cap[-n_0,n_0]} \subset \mathscr{D}_E,$$

pois $A \subset B$ implica em $\mathscr{D}_A \subset \mathscr{D}_B$.

□

Teorema 1.52 (Vitali) *Existe $X \subset \mathbb{R}$ tal que $X \notin \mathscr{M}$.*

Demonstração: Em $\mathbb{R}$ defina $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$.

Isto define uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$.

Denote a classe de equivalência de $x \in \mathbb{R}$ por E_x, isto é,

$$E_x = \{x + r; r \in \mathbb{Q}\}.$$

Note que cada E_x é um conjunto enumerável e, portanto, mensurável com medida nula. Além disso, como as classes de equivalência formam uma partição de $\mathbb{R}$, temos que a quantidade destas classes é não enumerável pois, caso contrário, poderíamos enumerar estas classes, digamos, E_{x_n}, $n \geq 1$, e daí, $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 1} E_{x_n}$ seria enumerável.

Utilizando o axioma da escolha, formamos um conjunto X tomando um único elemento de cada uma das classes de equivalências. Assim, se $x, y \in X$ e $x \neq y$ então $x \not\sim y$, isto é, $x - y \notin \mathbb{Q}$.

Desta forma, o conjunto das diferenças $\mathscr{D}_X$ não pode conter nenhum intervalo aberto centrado na origem. Pelo lema anterior, temos $X \notin \mathscr{M}$ ou $m(X) = 0$.

Observe que se $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$ então $(X + r) \cap (X + s) = \varnothing$. De fato, se $x \in (X + r) \cap (X + s)$ então existem $y, z \in X$ tais que $x = y + r = z + s$. Portanto, $y - z = s - r \in \mathbb{Q}$, isto é $z \sim y$ e $z, y \in X$. Pela forma que X foi construído, tomando-se um único elemento de cada classe de equivalência, devemos ter $y = z$ e, portanto, $r = s$, que é absurdo.

Agora, dado $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in X$ tal que $x \in E_y$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x = y + r$. Portanto, $\mathbb{R} = \cup_{r \in \mathbb{Q}}(X + r) = \cup_{n \geq 1}(X + r_n)$, sendo $n \mapsto r_n$ uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Finalmente, suponha que $m(X) = 0$. Temos

$$\infty = m(\mathbb{R}) = m(\cup_{n \geq 1}(X + r_n)) = \sum_{n \geq 1} m(X + r_n) = \sum_{n \geq 1} m(X) = 0,$$

uma contradição. Portanto, $X \notin \mathscr{M}$. □

Corolário 1.53 *Se $A \subset \mathbb{R}$ tem medida exterior positiva então existe $B \subset A$ com $B \notin \mathscr{M}$.*

Demonstração: Sejam X o conjunto não mensurável do teorema anterior e $\{r_n\}$ uma enumeração dos números racionais. Temos

$$A = A \cap \mathbb{R} = A \cap \cup_{n \geq 1}(X + r_n) = \cup_{n \geq 1} A \cap (X + r_n).$$

Assim,

$$0 < m^*(A) \leq \sum_{n \geq 1} m^*(A \cap (X + r_n))$$

e, portanto, $0 < m^*(A \cap (X + r_{n_0}))$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Se $A \cap (X + r_{n_0})$ fosse mensurável, como ele tem medida positiva, pelo lema existiria um intervalo aberto I centrado na origem tal que

$$I \subset \mathscr{D}_{A \cap (X + r_{n_0})} \subset \mathscr{D}_{X + r_{n_0}}.$$

Tome $r \in I \cap \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. Logo, $r \in \mathscr{D}_{X + r_{n_0}}$, $r \neq 0$. Assim, existem $x, y \in X$ tais que

$$0 \neq r = (x + r_{n_0}) - (y + r_{n_0}) = x - y,$$

isto é, $x, y \in X$, $x \sim y$ e $x \neq y$, que é impossível pela definição de X.

Portanto, $B \doteq A \cap (X + r_{n_0}) \subset A$ não é mensurável.

□

Corolário 1.54 $\#(\mathscr{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{M}) = 2^c$.

Demonstração:

Sejam $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não mensurável contido em $[2,3]$, o qual existe pelo Corolário 1.53.

Seja C o conjunto de Cantor. Se $Z \subset C$ então $Z \cup E$ não é mensurável pois, caso contrário, como $Z \cap E \subset [0,1] \cap [2,3] = \varnothing$, teríamos que $E = (Z \cup E) \setminus Z$ seria mensurável.

Desta forma podemos definir a função $\varphi : \mathscr{P}(C) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{M}$ por $\varphi(Z) = Z \cup E$.

A função φ é injetora pois se $\varphi(Z_1) = \varphi(Z_2)$ então, como $Z_1 \cap E = Z_2 \cap E = \varnothing$, temos

$$Z_1 = (Z_1 \cup E) \setminus E = \varphi(Z_1) \setminus E = \varphi(Z_2) \setminus E = (Z_2 \cup E) \setminus E = Z_2.$$

Segue que a cardinalidade do domínio de φ é no máximo igual à cardinalidade de seu contradomínio. Assim,

$$2^c = \#\mathscr{P}(C) \leq \#(\mathscr{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{M}) \leq \#\mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^c.$$

$\square$

Segue que cardinalidade da classe dos conjuntos mensuráveis é a mesma que a cardinalidade da σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis que, por sua vez, tem a mesma cardinalidade do conjunto das partes de $\mathbb{R}$.

Corolário 1.55 *A medida exterior de Lebesgue não é finitamente aditiva, isto é, não satisfaz o seguinte: para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$ tais que $X \cap Y = \varnothing$, tem-se $m^*(X \cup Y) = m^*(X) + m^*(Y)$.*

Demonstração:

Sejam $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não mensurável e $A \subset \mathbb{R}$ arbitrário. Como $A \cap E$ e $A \cap E^{\mathrm{c}}$ são disjuntos e sua reunião é igual a A, se m^* fosse aditiva então

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

ou seja, E seria mensurável.

$\square$

Capítulo 2

Funções mensuráveis

As notas a seguir são baseadas no livro *Real Analysis* de H. L. Royden, 3ª Ed., Macmillan Publishing Company, 444 páginas.

2.1 Definição e propriedades

Proposição 2.1 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e* $f : E \to [-\infty, +\infty]$ *(função a valores reais estendidos).*

São equivalentes

i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{x \in E; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{M};$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{x \in E; f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{M};$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{x \in E; f(x) < \alpha\} \in \mathscr{M};$

iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{x \in E; f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{M}.$

Qualquer uma das condições acima implica em

v) $\forall \alpha \in [-\infty, +\infty] \quad \{x \in E; f(x) = \alpha\} \in \mathscr{M}.$

Demonstração: Lembre que $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra.
(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\{f \geq \alpha\} = \cap_{n\geq 1} \left\{ f > \alpha - \frac{1}{n} \right\}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\{f < \alpha\} = \{f \geq \alpha\}^{c} \cap E.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$$\{f \leq \alpha\} = \cap_{n\geq 1} \left\{ f < \alpha + \frac{1}{n} \right\}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

$$\{f > \alpha\} = \{f \leq \alpha\}^{c} \cap E.$$

Agora, se $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{f = \alpha\} = \{f \leq \alpha\} \cap \{f \geq \alpha\}$$

e segue de (ii) e (iv) que vale $\{f = \alpha\} \in \mathscr{M}$.

Se $\alpha = -\infty$,

$$\{f = -\infty\} = \cap_{n\geq 1} \{f < -n\}$$

e segue de (iii) que $\{f = -\infty\} \in \mathscr{M}$.

Finalmente, se $\alpha = \infty$,

$$\{f = \infty\} = \cap_{n\geq 1} \{f > n\}$$

e segue de (i) que $\{f = \infty\} \in \mathscr{M}$.

$\square$

Definição 2.2 *Uma função a valores reais estendidos é mensurável se seu domínio for mensurável e se cumprir qualquer uma das condições (i) a (iv) da proposição anterior.*

Observação 2.3 *A condição (v) não é suficiente para a função ser mensurável. Tome $X \subset (0, +\infty)$ um conjunto não mensurável e defina $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in X \\ -x, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Esta função é injetora e para cada $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ temos que

$$\{x \in (0, +\infty); f(x) = \alpha\}$$

é $\{\alpha\}$, $\{-\alpha\}$ ou $\varnothing$. Em qualquer um dos casos, é um conjunto mensurável.

No entanto, f não é mensurável pois $\{x \in (0, +\infty); f(x) > 0)\} = X \notin \mathscr{M}$.

Proposição 2.4 *Seja E um conjunto mensurável. O conjunto das funções mensuráveis $f : E \to \mathbb{R}$ forma um espaço vetorial. Além do mais, se $f, g : E \to \mathbb{R}$ são mensuráveis então fg é mensurável. Se g não se anula então f/g também é mensurável.*

Demonstração: Sejam $f, g : E \to \mathbb{R}$ mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Mostremos primeiramente que $f + c$ é mensurável.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in E; f(x) + c > \alpha\} = \{x \in E; f(x) > \alpha - c\} \in \mathscr{M}.$$

Assim, $f + c$ é mensurável.

Mostremos que cf é mensurável.

Se $c = 0$ então $cf \equiv 0$ e, portanto,

$$\{x \in E; cf(x) = 0 > \alpha\} = \begin{cases} \varnothing & \text{se } \alpha \geq 0 \\ E & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \in \mathscr{M}.$$

Se $c > 0$,

$$\{x \in E; cf(x) > \alpha\} = \{x \in E; f(x) > \alpha/c\} \in \mathscr{M}.$$

Se $c < 0$,

$$\{x \in E; cf(x) > \alpha\} = \{x \in E; f(x) < \alpha/c\} \in \mathscr{M}.$$

Logo, cf é mensurável.

Vamos mostrar que $f+g$ é mensurável.

Dado $x \in E$ tal que $f(x)+g(x) < \alpha$, isto é, $f(x) < \alpha - g(x)$, tome $r = r_x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Reciprocamente, se $f(x) < r < \alpha - g(x)$ para algum $r \in \mathbb{Q}$ então $f(x)+g(x) < \alpha$. Seja $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais. Temos

$$\{x \in E; f(x)+g(x) < \alpha\} = \cup_{n\geq 1}\{x \in E; f(x) < r_n < \alpha - g(x)\}$$
$$= \cup_{n\geq 1}\{x \in E; f(x) < r_n\} \cap \{x \in E; g(x) < \alpha - r_n\} \in \mathscr{M}.$$

Logo, $f+g$ é mensurável. Combinando com o que já foi demonstrado, temos também que $f-g$ mensurável.

Note que f^2 é mensurável pois

$$\{x \in E; f^2(x) > \alpha\} =$$
$$= \begin{cases} E, \text{ se } \alpha < 0 \\ \\ \{x \in E; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in E; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}, \text{ se } \alpha \geq 0 \end{cases}.$$

Agora, como

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

vemos que fg é mensurável.

Finalmente, suponha que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. Temos, usando uma notação mais enxuta,

$$\{1/g > \alpha\} = [\{g > 0\} \cap \{1/g > \alpha\}] \cup [\{g < 0\} \cap \{1/g > \alpha\}]$$
$$= [\{g > 0\} \cap \{1 > \alpha g\}] \cup [\{g < 0\} \cap \{\alpha g > 1\}] \in \mathscr{M}.$$

□

Definição 2.5 *Dado $A \subset \mathbb{R}$, a função característica de A é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \in A \\ 0, & \textit{se } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}.$$

Exemplo 2.6 *χ_A é mensurável se e somente se A for mensurável.*

Exemplo 2.7 *Sejam E mensurável e $f : E \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é mensurável.*

De fato, basta ver que

$$\{x \in E; f(x) > \alpha\} = E \cap \mathscr{O} \in \mathscr{M},$$

para algum aberto $\mathscr{O}$ da reta.

Mais geralmente, se f for semicontínua superiormente (resp., inferiormente) então f também é mensurável pois $\{x \in E; f(x) < \alpha\}$ (resp., $\{x \in E; f(x) > \alpha\}$) é aberto relativo de E .

Proposição 2.8 *Seja $E \subset \mathbb{R}$ mensurável. Então $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se $f^{-1}(\mathscr{O}) \in \mathscr{M}$ para todo aberto $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração: Suponha que f seja mensurável. Dado um aberto $\mathscr{O}$ escreva-o como $\mathscr{O} = \cup_{n\geq 1} I_n$ em que cada I_n é um intervalo aberto (a reunião podendo ser finita). Temos $f^{-1}(\mathscr{O}) = \cup_{n\geq 1} f^{-1}(I_n)$.

Se I_n for ilimitado então $f^{-1}(I_n)$ é mensurável pela Proposição 2.1. Se $I_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, então

$$f^{-1}(I_n) = f^{-1}((a_n, b_n)) = \{f > a_n\} \cap \{f < b_n\} \in \mathscr{M}.$$

De qualquer modo, $f^{-1}(\mathscr{O})$ é uma reunião enumerável de conjuntos mensuráveis.

Reciprocamente, basta tomar abertos da forma $\mathscr{O} = (\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\square$

Como $f^{-1}(A^{\mathrm{c}}) = [f^{-1}(A)]^{\mathrm{c}}$ segue imediatamente o seguinte

Corolário 2.9 *Seja $E \subset \mathbb{R}$ mensurável. Então $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se $f^{-1}(F) \in \mathscr{M}$ para todo fechado $F \subset \mathbb{R}$.*

Corolário 2.10 *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ mensurável, $f : E \to \mathbb{R}$ mensurável e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Então $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração: Dado um aberto $\mathscr{O}$ temos

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{O}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{O})) \in \mathscr{M},$$

pois $g^{-1}(\mathscr{O})$ é aberto e f é mensurável.

$\square$

Exemplo 2.11 *Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável então são mensuráveis $|f|$, e^f, $\operatorname{sen} f$, etc.*

Corolário 2.12 *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ mensurável, $f : E \to \mathbb{R}$ e $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel. Então $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se para todo $B \in \mathscr{B}$ temos $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$.*

Demonstração: Se $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$ sempre que $B \in \mathscr{B}$, tomando $B = (\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que f é mensurável.

Suponha que f seja mensurável.

Seja

$$\mathscr{F} = \{X \subset \mathbb{R}; f^{-1}(X) \in \mathscr{M}\}.$$

Mostremos que $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra.

- $f^{-1}(\mathbb{R}) = E \in \mathscr{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \in \mathscr{F}$.
- $X \in \mathscr{F} \Longrightarrow f^{-1}(X) \in \mathscr{M} \Longrightarrow f^{-1}(X^{\mathrm{c}}) = [f^{-1}(X)]^{\mathrm{c}} \in \mathscr{M} \Longrightarrow X^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$.
- $X_n \in \mathscr{F}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f^{-1}(X_n) \in \mathscr{M}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f^{-1}(\cup_{n\geq 1} X_n) = \cup_{n\geq 1} f^{-1}(X_n) \in \mathscr{M} \Longrightarrow \cup_{n\geq 1} X_n \in \mathscr{F}$.

  Como f é mensurável,

$$\mathscr{E} \doteq \{(\alpha, +\infty); \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{F}.$$

  Portanto, $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F}$, ou seja, para todo $B \in \mathscr{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$.

$\square$

Observação 2.13 *Tanto a Proposição 2.8 como os Corolário 2.9 e Corolário 2.12 têm versões análogas quando a função assume valores em* $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

No caso da Proposição 2.8 os abertos têm de ser tomados em $\overline{\mathbb{R}}$.

Com relação ao Corolário 2.9 os fechados são os fechados de $\overline{\mathbb{R}}$ *enquanto que no caso do Corolário 2.12 os borelianos se referem à* σ*-álgebra de Borel* $\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ *da reta estendida. Esta* σ*-álgebra é a menor* σ*-álgebra formada pelos abertos da reta estendida. Pode-se mostrar que* $B \in \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ *se e somente se* $B \setminus \{-\infty, +\infty\} \in \mathscr{B}$.

Com relação à Proposição 2.4, pode não fazer sentido, por exemplo, a adição de funções a valores estendidos.

Exemplo 2.14 *Seja* $X \notin \mathscr{M}$. *Defina* $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *por*

$$f = +\infty\chi_X - \infty\chi_{X^c}.$$

Como $\{+\infty\}$ *é fechado em* $\overline{\mathbb{R}}$ *e* $f^{-1}(\{+\infty\}) = X \notin \mathscr{M}$, f *não é mensurável pela observação acima no que se refere ao Corolário 2.9. No entanto, para qualquer* $B \in \mathscr{B}$ *(boreliano da reta) temos* $f^{-1}(B) = \varnothing \in \mathscr{M}$.

Proposição 2.15 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e* $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, *funções mensuráveis. Então as seguintes funções definidas em* E *são mensuráveis:*

1. $h_1 = \max\{f_1, \dots, f_n\}$
2. $h_2 = \min\{f_1, \dots, f_n\}$
3. $h_3 = \sup_n f_n$
4. $h_4 = \inf_n f_n$
5. $h_5 = \limsup_{n\to\infty} f_n$
6. $h_6 = \liminf_{n\to\infty} f_n$

Em particular, se f_n *converge para* f *então* f *é mensurável.*

Demonstração:

1. $h_1 = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$

$$\{x \in E; h_1(x) > \alpha\} = \cup_{k=1}^{n}\{x \in E; f_k(x) > \alpha\}$$

2. $h_2 = \min\{f_1, \ldots, f_n\}$

$$\{x \in E; h_2(x) < \alpha\} = \cup_{k=1}^{n}\{x \in E; f_k(x) < \alpha\}$$

3. $h_3 = \sup_n f_n$

$$\{x \in E; h_3(x) > \alpha\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in E; f_n(x) > \alpha\}$$

4. $h_4 = \inf_n f_n$

$$\{x \in E; h_4(x) < \alpha\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in E; f_n(x) < \alpha\}$$

   Lembre que

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k(x) \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

5. $h_5 = \limsup_{n\to\infty} f_n$

   Coloque $g_n = \sup_{k\geq n} f_k$. Como no item 3, segue que g_n é mensurável. Pelo item 4 segue que $h_5 = \inf_n g_n$ é mensurável.

6. $h_6 = \liminf_{n\to\infty} f_n$

   Coloque $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Como no item 4 segue que g_n é mensurável. Pelo item 3 segue que $h_6 = \inf_n g_n$ é mensurável.

Finalmente, se $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ então f é mensurável pois, por exemplo, $\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$. $\square$

Definição 2.16 *Dizemos que uma propriedade vale para quase todo $x \in E \subset \mathbb{R}$ ou quase sempre em E se o conjunto dos pontos em que ela não vale tem medida nula. Também é comum dizer-se que a propriedade vale em quase toda parte de E. Usam-se as abreviações q. t. $x \in E$, q. s. em E e q. t. p. de E, respectivamente.*

Observação 2.17 *Quando não houver confusão pode-se omitir o conjunto E. Por exemplo, tal propriedade vale quase sempre ou, simplesmente, tal propriedade vale q. s..*

Exemplo 2.18 *Sejam f, g funções definidas em $E \subset \mathbb{R}$. Tem-se que $f = g$ quase sempre quando o conjunto $\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$ tiver medida nula.*

Proposição 2.19 *Sejam $E \in \mathscr{M}$ e $f, g : E \to [-\infty, \infty]$. Se f é mensurável e $g = f$ quase sempre então g é mensurável.*

Demonstração: Seja $Z = \{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$. Z é mensurável pois tem medida nula.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in E; g(x) > \alpha\} = \{x \in E \setminus Z; g(x) > \alpha\} \cup \{x \in Z; g(x) > \alpha\},$$

mas

$$\begin{aligned}\{x \in E \setminus Z; g(x) > \alpha\} &= \{x \in E \setminus Z; f(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E; f(x) > \alpha\} \cap Z^{\mathrm{c}} \in \mathscr{M}\end{aligned}$$

pois f é mensurável e

$$\{x \in Z; g(x) > \alpha\}$$

é mensurável, visto que tem medida exterior nula por estar contido em Z.

$\square$

Exemplo 2.20 *Sejam E um conjunto mensurável e $f_k : E \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge quase sempre. Então existe uma função $f : E \to \mathbb{R}$ mensurável tal que f_k converge para f quase sempre.*

De fato, seja $Z \subset E$ o conjunto dos pontos x em que $f_k(x)$ não converge. Por hipótese $m(Z) = 0$.

Em $E \setminus Z$ defina $f_0(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Pelo item 5 (ou 6) da Proposição 2.15, f_0 é mensurável em $E \setminus Z$.

Defina $f : E \to \mathbb{R}$ como sendo f_0 em $E \setminus Z$ e, digamos, igual a 0 em Z.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in E; f(x) > \alpha\} = \{x \in E \setminus Z; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in Z; f(x) > \alpha\}$$

$$= \{x \in E \setminus Z; f_0(x) > \alpha\} \cup \{x \in Z; 0 > \alpha\} \in \mathscr{M}.$$

Logo f_k converge para f quase sempre e f é mensurável.

Definição 2.21 *Uma função mensurável a valores reais é simples se assumir apenas um número finito de valores, isto é, sua imagem é um conjunto finito de números reais.*

Se φ é uma função simples e assume os valores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ então podemos escrever

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad A_i \doteq \varphi^{-1}(\{\alpha_i\}).$$

No caso em que $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, então $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Neste caso dizemos que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ é a representação padrão (*standard*) ou normal de φ.

Exercício 2.22 *Sejam $E \in \mathscr{M}$ e $\varphi : E \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ com $A_i \subset E$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Mostre que φ é mensurável se e somente se $A_i \in \mathscr{M}$, $i = 1, \dots, n$.*

Definição 2.23 *Uma função definida em um intervalo $[a, b]$ é chamada de função escada se for possível representá-la por $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}$ com cada I_i sendo um intervalo de comprimento positivo, $I_i \cap I_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ e $[a, b] = \cup_{i=1}^{n} I_i$.*

Exemplo 2.24 *Sejam $\varphi, \psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$\varphi(x) = 2\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - 3\chi_{(\frac{1}{2},1]}$$

e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \textit{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Vemos que φ é uma função escada enquanto que ψ é somente simples.

Note que

$$\varphi = 2\chi_{[0,\frac{1}{2})} - 3\chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

quase sempre.

2.2 Aproximação

Vejamos agora alguns resultados relativos a aproximação de funções. Aqui o sentido de aproximação é que o conjunto em que duas funções diferem tem medida arbitrariamente pequena.

Lema 2.25 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função escada. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma função contínua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$m(\{x \in [a,b]; \varphi(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon.$$

Além do mais, se $m, M \in \mathbb{R}$ são tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$, então φ pode ser tomada com $m \leq \varphi(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração: Podemos escrever

$$[a,b] = \cup_{j=1}^{n} I_j$$

com I_j, $j = 1, \ldots, n$ intervalos dois a dois disjuntos de forma que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}.$$

Podemos também reordenar os intervalos I_j de tal forma que o extremo superior de I_j seja igual ao extremo inferior de I_{j+1}, $j = 1, \ldots, n-1$. Dessa forma, o extremo superior de I_n será o número b.

Se f for contínua então f é constante. Neste caso, tome $\varphi = f$.

Se f assume o mesmo valor em I_j e I_{j+1} para algum $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ então f é contínua no intervalo $I_j \cup I_{j+1}$. Podemos supor que isto não aconteça, isto é, que f seja descontínua na extremidade superior dos intervalos I_j, $j = 1, \ldots, n-1$. Chamemos estes números de $x_1, \ldots, x_{n-1} \in (a, b)$, respectivamente.

A ideia para construir a função φ é modificar a função f nas proximidades de cada x_j por uma função afim de modo que o conjunto de pontos onde elas diferem não seja muito grande em medida. Como a quantidade de pontos de descontinuidade de f é finita isto pode ser realizado.

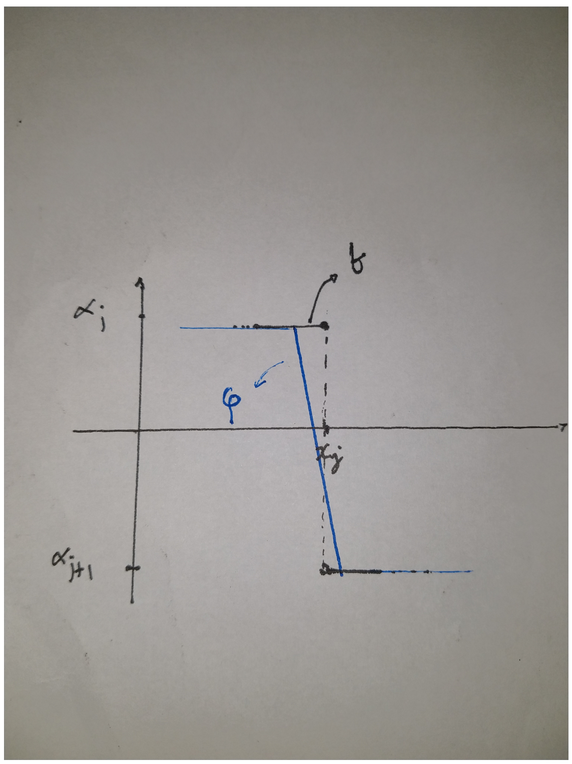

Figura 2.1: Aproximação de função escada por função contínua

Dado $\varepsilon > 0$ tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ e

$$J_j \doteq (x_j - \frac{\varepsilon}{2m}, x_j + \frac{\varepsilon}{2m}) \subset (a,b) \text{ e } J_j \cap J_i = \varnothing \text{ se } i \neq j, i, j = 1, \ldots, n-1.$$

Defina $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{m}{\varepsilon}(\alpha_{j+1} - \alpha_j)(x - x_j + \frac{\varepsilon}{2m}) + \alpha_j, \text{ se } x \in J_j, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{para algum } j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \\ \alpha_i = f(x), \text{ se } x \in I_i \setminus \cup_{j=1}^{n-1} J_j, \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}.$$

Deste modo, φ é contínua,

$$E \doteq \{x \in [a,b]; \varphi(x) \neq f(x)\} \subset \cup_{j=1}^{n-1} J_j$$

e, portanto,

$$m(E) \leq \sum_{j=1}^{n-1} m(J_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{m} = (n-1)\frac{\varepsilon}{m} < \varepsilon.$$

Finalmente, note que

$$\min f \leq \varphi \leq \max f.$$

$\square$

Lema 2.26 *Seja E mensurável com medida finita. Dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos limitados disjuntos I_j, $j = 1, \ldots, n$ tais que*

$$m(E \Delta \cup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon \quad \textit{e} \quad m(\{x \in E; \chi_E(x) \neq \sum_{j=1}^{n} \chi_{I_j}(x)\}) < \varepsilon.$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existem intervalos abertos limitados disjuntos I_j, $j = 1, \ldots, n$ tais que

$$m(E\Delta \cup_{j=1}^n I_j) < \varepsilon.$$

Se $x \in E \cap \cup_{j=1}^n I_j$ então, como os intervalos I_j são disjuntos,

$$\sum_{j=1}^n \chi_{I_j}(x) = 1 = \chi_E(x).$$

Logo,

$$\{x \in E; \chi_E(x) \neq \sum_{j=1}^n \chi_{I_j}(x)\} \subset E \cap \left[\cup_{j=1}^n I_j\right]^{\mathrm{c}} \subset E\Delta \cup_{j=1}^n I_j.$$

Portanto,

$$m(\{x \in E; \chi_E(x) \neq \sum_{j=1}^n \chi_{I_j}(x)\}) \leq m(E\Delta \cup_{j=1}^n I_j) < \varepsilon.$$

□

Lema 2.27 *Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função simples. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma função escada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$m(\{x \in [a, b]; f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon.$$

Além do mais,

$$\min \varphi \leq f \leq \max \varphi.$$

Demonstração: Vamos provar o caso em que φ assume dois valores para não sobrecarregar muito a notação. Assim, suponha que

$$\varphi = \alpha\chi_A + \beta\chi_B, \alpha \neq \beta, A \cap B = \varnothing \text{ e } A \cup B = [a, b].$$

Como φ é simples, os conjuntos A e B são mensuráveis.

Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 2.26 existem intervalos abertos limitados disjuntos I_i, $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$m(A\Delta \cup_{i=1}^{n} I_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad m(\{x \in A; \chi_A(x) \neq \sum_{i=1}^{n} \chi_{I_i}(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e intervalos abertos limitados disjuntos J_j, $j = 1, \ldots, m$, tais que

$$m(B\Delta \cup_{j=1}^{m} J_j) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad m(\{x \in B; \chi_B(x) \neq \sum_{j=1}^{m} \chi_{J_j}(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- se $x \in [a, b] \cap \cup_{i=1}^{n} I_i$ coloque $f(x) = \alpha$;
- se $x \in [a, b] \cap \left[\cup_{j=1}^{m} J_j \setminus \cup_{i=1}^{n} I_i\right]$ coloque $f(x) = \beta$;
- se $x \in [a, b] \cap \left[\cup_{i=1}^{n} I_i \cup \cup_{j=1}^{m} J_j\right]^{\mathrm{c}}$ coloque $f(x) = \alpha$ (ou β).

Observe que f é uma função escada e como só assume os valores α e β, temos

$$\min \varphi \leq f \leq \max \varphi.$$

Também, temos

$$f(x) = \varphi(x) \text{ se } x \in [A \cap \cup_{i=1}^{n} I_i] \cup \left[B \cap \left[\cup_{j=1}^{m} J_j \setminus \cup_{i=1}^{n} I_i\right]\right]. \tag{2.28}$$

Afirmação: como $A \cap B = \varnothing$ então, se $X, Y \subset \mathbb{R}$, temos

$$B \setminus (X \setminus Y) \subset (B\Delta X) \cup (A\Delta Y).$$

De fato,

$$B \setminus (X \setminus Y) = B \cap (X \cap Y^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = B \cap (X^{\mathrm{c}} \cup Y)$$

$$= (B \cap X^{\mathrm{c}}) \cup (B \cap Y) \subset (B\Delta X) \cup (B \cap Y),$$

mas, como $A \cap B = \varnothing$,

$$B \cap Y = B \cap (Y \setminus A) \subset Y \setminus A \subset A\Delta Y.$$

Assim, tomando $X = \cup_{j=1}^m J_j$ e $Y = \cup_{i=1}^n I_i$ vemos que

$$B \setminus (\cup_{j=1}^m J_j \setminus \cup_{i=1}^n I_i) \subset (B \Delta \cup_{j=1}^m J_j) \cup (A \Delta \cup_{i=1}^n I_i).$$

Logo, segue de (2.28) que

$$\begin{aligned}
\{x \in [a,b]; \varphi(x) \neq f(x)\} &= \{x \in A; \varphi(x) \neq f(x)\} \cup \{x \in B; \varphi(x) \neq f(x)\} \\
&\subset (A \setminus \cup_{i=1}^n I_i) \cup (B \setminus (\cup_{j=1}^m J_j \setminus \cup_{i=1}^n I_i)) \\
&\subset (A \Delta \cup_{i=1}^n I_i) \cup [(B \Delta \cup_{j=1}^m J_j) \cup (A \Delta \cup_{i=1}^n I_i)] \\
&= (A \Delta \cup_{i=1}^n I_i) \cup (B \Delta \cup_{j=1}^m J_j).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$m(\{x \in [a,b]; \varphi(x) \neq f(x)\}) \leq m(A \Delta \cup_{i=1}^n I_i) + m(B \Delta \cup_{j=1}^m J_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Lema 2.29 *Seja $f : [a,b] \to [-\infty, +\infty]$ mensurável e finita quase sempre. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que*

$$m(\{x \in [a,b]; |f(x)| \geq M\}) < \varepsilon.$$

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned}
Z &= \{x \in [a,b]; f(x) = -\infty \text{ ou } f(x) = +\infty\} \\
&= \{x \in [a,b]; |f(x)| = +\infty\}.
\end{aligned}$$

Por hipótese, $m(Z) = 0$.

Defina

$$E_n = \{x \in [a,b]; |f(x)| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Temos que E_n é mensurável, $E_{n+1} \subset E_n$ e $m(E_1) \leq b - a < \infty$. Como

$$\cap_{n \geq 1} E_n = Z$$

segue de um resultado já visto que

$$0 = m(Z) = m(\cap_{n\geq 1} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(\{x \in [a,b]; |f(x)| \geq M\}) = m(E_M) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.30 *Seja $f : [a,b] \to [-\infty, +\infty]$ mensurável e finita quase sempre. Então, dado $\varepsilon > 0$ existem uma função escada g e uma função contínua h definidas em $[a,b]$ satisfazendo*

$$m(\{x \in [a,b]; |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$$

e

$$m(\{x \in [a,b]; |f(x) - h(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Além do mais, se existirem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$, então g e h podem ser tomadas com $m \leq g(x), h(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ pelo Lema 2.29 existe $K > 0$ tal que $|f(x)| < K$ exceto em um subconjunto $E_1 \subset [a,b]$ com $m(E_1) < \varepsilon/3$.

Seja

$$\widetilde{f} = \begin{cases} K & \text{em } E_1 \\ f & \text{em } [a,b] \setminus E_1 \end{cases} = f\chi_{[a,b]\setminus E_1} + K\chi_{E_1}.$$

Note que $\widetilde{f}$ é mensurável.

Coloque $E \doteq [a,b] \setminus E_1$. Temos $\widetilde{f}|_E = f|_E$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $2K/n < \varepsilon$. Escreva

$$[-K, K] = \cup_{i=1}^{n} I_i$$

com $I_i = [a_i, b_i)$, $\ell(I_i) = 2K/n$, $i = 1, \ldots, n-1$, $I_n = [a_n, b_n]$, $a_1 = -K$, $b_n = K$ e $b_i = a_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Defina

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\widetilde{f}^{-1}([a_i,b_i))} + K\chi_{\widetilde{f}^{-1}(\{K\})}.$$

É claro que φ é uma função simples.

Se $x \in E$ então $|f(x)| < K$ e, portanto, $f(x) \in [a_j, b_j)$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, como $\widetilde{f} = f$ em E,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\widetilde{f}^{-1}([a_i,b_i))}(x) + K\chi_{\widetilde{f}^{-1}(\{K\})}(x) = a_j.$$

Segue que

$$|\varphi(x) - f(x)| = |a_j - f(x)| \leq \ell(I_j) = 2K/n < \varepsilon,$$

ou seja, $|\varphi - f| < \varepsilon$ em E.

Olhando a função φ como sendo definida em $[a, b]$, pelo Lema 2.27, existe uma função escada g definida em $[a, b]$ tal que $\varphi = g$ em $[a, b]$ exceto em um subconjunto $E_2 \subset [a, b]$ com $m(E_2) < \varepsilon/3$.

Em $E \setminus E_2 = [a, b] \setminus (E_1 \cup E_2)$ temos

$$|g - f| \leq |g - \varphi| + |\varphi - f| = |\varphi - f| < \varepsilon,$$

portanto,

$$m(\{x \in [a, b]; |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m(E_1 \cup E_2) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Agora, pelo Lema 2.25 existe uma função contínua h definida em $[a, b]$ tal que $h = g$ exceto em um subconjunto $E_3 \subset [a, b]$ com $m(E_3) < \varepsilon/3$.

Em $[a, b] \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ temos

$$|h - f| \leq |f - \varphi| + |\varphi - g| + |g - h| = |f - \varphi| < \varepsilon,$$

portanto,

$$m(\{x \in [a, b]; |f(x) - h(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m(E_1 \cup E_2 \cup E_3) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

No caso em que $m \leq f \leq M$ em $[a, b]$ o conjunto E_1 pode ser tomado como o vazio e substituímos o intervalo $[-K, K]$ pelo intervalo $[m, M]$. Os intervalos I_i, como antes, são tomados todos com o mesmo comprimento, neste caso igual a $(M-m)/n$ e n é escolhido de modo que $(M-m)/n < \varepsilon$.

A função φ é definida como acima e vê-se que satisfaz $m \leq \varphi \leq M$. Pelo Lema 2.27 a função escada f pode ser tomada satisfazendo também $m \leq f \leq M$. Pelo Lema 2.25 a função contínua g também pode ser tomada respeitando-se a a mesma limitação de f.

□

2.3 Os teoremas de Egoroff e de Lusin

O Teorema de Egoroff que veremos a seguir diz que convergência quase sempre de sequência de funções mensuráveis definidas em um conjunto de medida finita é *quase* uma convergência uniforme. Antes de enunciarmos precisamente este teorema precisamos do seguinte

Lema 2.31 *Sejam E um conjunto mensurável de medida finita e $f_k : E \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge quase sempre para $f : E \to \mathbb{R}$. Então, dados $\varepsilon, \eta > 0$ existem um fechado F contido em E e $m_0 \in \mathbb{N}$ tais que $m(E \setminus F) < \eta$ e $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ para todos $x \in F$ e $k \geq m_0$.*

Demonstração: Seja Z o subconjunto de E de medida nula em que f_k não converge para f.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ defina

$$E_m = \{x \in E; |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon, \forall k > m\}$$

$$= \cap_{k>m}\{x \in E; |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon\} \in \mathscr{M}.$$

Temos

- $E_m \subset E_{m+1}$
- $m(E_m) \leq m(E_{m+1})$

- $E \setminus Z \subset \cup_{m \geq 1} E_m$, pois se $x \in E \setminus Z$ então $f_k(x) \to f(x)$ e, portanto, existe $m \geq 1$ tal que $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ para todo $k > m$, isto é, $x \in E_m$.

Temos

$$m(E) \geq m(\cup_{m \geq 1} E_m) = \lim_{m \to \infty} m(E_m) \geq m(E \setminus Z) = m(E) - m(Z) = m(E),$$

isto é,

$$\lim_{m \to \infty} m(E_m) = m(E) < \infty.$$

Segue que

$$\lim_{m \to \infty} m(E \setminus E_m) = m(E) - \lim_{m \to \infty} m(E_m) = 0.$$

Dado $\eta > 0$, tome $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(E \setminus E_{m_0}) < \eta/2$.

Como E_{m_0} é mensurável, existe um fechado F contido em E_{m_0} tal que $m(E_{m_0} \setminus F) < \eta/2$.

Portanto, como $F \subset E_{m_0} \subset E$ temos

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus E_{m_0}) + m(E_{m_0} \setminus F) < \eta/2 + \eta/2 = \eta$$

e se $x \in F \subset E_{m_0}$ então $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ para todo $k > m_0$.

□

Teorema 2.32 (Egoroff) *Sejam E um conjunto mensurável de medida finita e $f_k : E \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge quase sempre para $f : E \to \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe um fechado F contido em E tal que $m(E \setminus F) < \varepsilon$ e f_k converge uniformemente para f em F.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 2.31 podemos encontrar um fechado F_n contido em E e $m = m(n, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que

$$m(E \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n} \text{ e } |f - f_k| < \frac{1}{n} \text{ em } F_n, \text{ para todo } k \geq m = m(n, \varepsilon).$$

(*Obs. O Lema 2.31 foi utilizado aqui com $\eta = \varepsilon 2^{-n}$ e o ε (do enunciado do lema, não o que foi tomado no início desta demonstração) sendo igual a $1/n$.*)

Seja $F = \cap_{n\geq 1} F_n$. Dessa forma, F é fechado e contido em E
Dado $\eta > 0$ tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_o > 1/\eta$.
Para todo $x \in F$, temos $x \in F_{n_0}$. Logo,

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{n_0} < \eta, \quad \text{para todo } k \geq m = m(n_0, \varepsilon),$$

ou seja, f_k converge uniformemente para f em F.

Finalmente,

$$\begin{aligned} m(E \setminus F) &= m(E \cap (\cap_{n\geq 1} F_n)^c) = m(E \cap (\cup_{n\geq 1} F_n^c)) \\ &= m(\cup_{n\geq 1}(E \cap F_n^c)) = m(\cup_{n\geq 1}(E \setminus F_n)) \\ &\leq \sum_{n\geq 1} m(E \setminus F_n) < \sum_{n\geq 1} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

O último teorema que veremos nesta seção é o Teorema de Lusin. Vamos enunciá-lo, mas sua demonstração será feita após alguns lemas.

Teorema 2.33 (Teorema de Lusin) *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$. A fim de que f seja mensurável é necessário e suficiente que para cada $\varepsilon > 0$ exista fechado $F \subset E$ satisfazendo*

1. $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$
2. *f é contínua em F.*

O próximo resultado é sobre aproximação de funções mensuráveis por funções simples. Ele tem importância não só na demonstração do Teorema de Lusin mas também quando formos estudar a integral de Lebesgue.

Lema 2.34 *Seja E um subconjunto mensurável.*

a) Se $f : E \to [0, +\infty]$ é mensurável então existe uma sequência de funções simples (φ_n) satisfazendo $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$, $\varphi_n \nearrow f$ pontualmente e, mais ainda, uniformemente sobre qualquer conjunto em que f for limitada.

b) Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável então existe uma sequência de funções simples (φ_n) satisfazendo $0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \cdots \leq |f|$, $\varphi_n \to f$ pontualmente e, mais ainda, uniformemente sobre qualquer conjunto em que f for limitada.

Demonstração: a) Para cada inteiro não negativo n e $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$ defina

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]),$$

$$F_n = f^{-1}((2^n, +\infty])$$

e

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\chi_{E_n^k} + 2^n\chi_{F_n}.$$

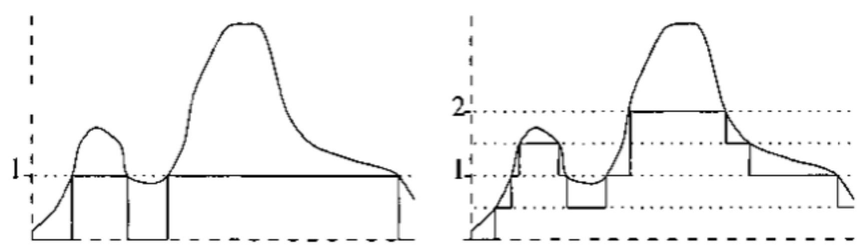

Figura 2.2: φ_0 (esquerda) e φ_1 – Folland, pág. 47

É claro que φ_n é simples e satisfaz $0 \leq \varphi_n \leq f$.

Mostremos que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$.

Se $x \in F_n$ então $\varphi_n(x) = 2^n < 2^{n+1}$ e $f(x) > 2^n$. Se $f(x) > 2^{n+1}$ então $\varphi_{n+1}(x) = 2^{n+1}$ e, portanto,

$$\varphi_n(x) = 2^n < 2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x).$$

Caso contrário, temos $2^n < f(x) \leq 2^{n+1}$ e assim, existe

$$k \in \{2^{2n+1}, \ldots, 2^{2(n+1)} - 1\}$$

tal que
$$k2^{-n-1} < f(x) \leq (k+1)2^{-n-1},$$
ou seja,
$$\varphi_{n+1}(x) = k2^{-n-1} \geq 2^{2n+1}2^{-n-1} = 2^n = \varphi_n(x).$$

Logo, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ em F_n.

Agora, se $x \in E_n^k$, $k \in \{0, \ldots, 2^{2n} - 1\}$ então
$$k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n} \quad \text{e} \quad \varphi_n(x) = k2^{-n}.$$

Reescrevendo,
$$2k2^{-n-1} < f(x) \leq 2(k+1)2^{-n-1}.$$

Coloque $m = 2k$. Assim,
$$m2^{-n-1} < f(x) \leq (m+2)2^{-n-1}.$$

Se $f(x) \leq (m+1)2^{-n-1}$ então
$$\varphi_{n+1}(x) = m2^{-n-1} = k2^{-n} = \varphi_n(x).$$

Se $(m+1)2^{-n-1} < f(x) \leq (m+2)2^{-n-1}$ então
$$\varphi_{n+1}(x) = (m+1)2^{-n-1} = (2k+1)2^{-n-1} \geq 2k2^{-n-1} = k2^{-n} = \varphi_n(x).$$

Se
$$x \notin F_n \cup \cup_{k=0}^{2^{2n}-1} E_n^k = f^{-1}((0, +\infty])$$
então $f(x) = 0$ e, portanto,
$$x \notin F_{n+1} \cup \cup_{k=0}^{2^{2(n+1)}-1} E_{n+1}^k = f^{-1}((0, +\infty]).$$

Assim $\varphi_n(x) = 0 = \varphi_{n+1}(x)$.

Ou seja, φ_n é uma sequência crescente (não decrescente).

Passemos agora ao estudo da convergência.

Seja $x \in E$.

Se $f(x) = 0$ então para todo inteiro não negativo n, $x \notin E_n^k$ para todo $k \in \{0, \ldots, 2^{2n} - 1\}$ e $x \notin F_n$. Logo, $\varphi_n(x) = 0 = f(x)$, para todo $n \geq 0$. Ou seja, nesse caso $\varphi_n(x) \to f(x)$.

Se $0 < f(x) < +\infty$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < f(x) \leq 2^{n_0}$. Portanto, para todo $n \geq n_0$ temos $0 < f(x) \leq 2^n$. Dessa forma, para todo $n \geq n_0$, $x \in E_n^k$ para algum $k = k(n)$ e, portanto,

$$\varphi_n(x) = k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n} = k2^{-n} + 2^{-n} = \varphi_n(x) + 2^{-n}.$$

Logo,

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq 2^{-n}$$

para todo $n \geq n_0$ e todo

$$x \in \{x \in E; f(x) \leq 2^{n_0}\},$$

ou seja, $\varphi_n(x) \to f(x)$.

Se $f(x) = +\infty$ então $x \in F_n$ para todo n. Logo, $\varphi_n(x) = 2^n \to +\infty = f(x)$.

Finalmente, note que se $F \subset E$ é um conjunto onde f é limitada, digamos, $0 \leq f \leq M$ em F, então, tomando n_1 tal que $M < 2^{n_1}$, podemos repetir o processo acima e obter

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq 2^{-n}$$

para todo $n \geq n_1$ e $x \in F$, ou seja, a convergência em F é uniforme (n_1 não depende de x, mas apenas de F e M).

b) Seja ψ_n uma sequência de funções simples como no item anterior que converge para $|f|$, isto é, $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1} \leq |f|$, $\psi_n \nearrow |f|$ e a convergência é uniforme em conjuntos onde f é limitada.

Defina $\varphi_n = \text{sgn}(f)\psi_n$ em que o sinal de f, $\text{sgn}(f)$ é definido por

$$\text{sgn}(f) = \chi_{\{x \in E; f(x) > 0\}} - \chi_{\{x \in E; f(x) < 0\}}.$$

Como f é mensurável, $\text{sgn}(f)$ é uma função simples. Como o produto de funções simples é uma função simples, φ_n é uma função simples.

Como $|\varphi_n| = |\text{sgn}(f)\psi_n| = |\text{sgn}(f)|\psi_n = \psi_n$, pois se $f(x) = 0$ então $\psi_n(x) = 0$ e, consequentemente, $\varphi_n(x) = 0$, temos $|\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}|$.

Como

$$|\varphi_n - f| = |\text{sgn}(f)\psi_n - f| = |\text{sgn}(f)\psi_n - \text{sgn}(f)|f||$$

$$= |\operatorname{sgn}(f)||\psi_n - |f|| = |\psi_n - |f|| = |f| - \psi_n,$$

segue que $\varphi_n \to f$ pontualmente e uniformemente em conjuntos onde f é limitada.

□

O próximo lema diz que as funções simples satisfazem as condições 1 e 2 do Teorema de Lusin (2.33).

Lema 2.35 *Seja f uma função simples definida em um conjunto E. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe um fechado $F \subset E$ satisfazendo*

1. $m(E \setminus F) < \varepsilon$

2. *f é contínua em F.*

Demonstração: Seja $f : E \to \mathbb{R}$ a função simples dada por

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, \text{ com } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ e } E_i \cap E_j = \varnothing \text{ se } i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Como cada E_j é mensurável, dado $\varepsilon > 0$ existe fechado $F_j \subset E_j$ tal que $m(E_j \setminus F_j) < \varepsilon/n$.

Seja $F = \cup_{j=1}^{n} F_j$. F é fechado, contido em E e

$$m(E \setminus F) = m(\cup_{i=1}^{n} E_i \setminus \cup_{j=1}^{n} F_j) \leq m(\cup_{j=1}^{n} (E_j \setminus F_j)) \leq \sum_{j=1}^{n} m(E_j \setminus F_j) < \varepsilon.$$

Mostremos que f é contínua em F.

Sejam $x_0, x_k \in F$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $x_k \to x_0$.

Como os conjuntos F_j são dois a dois disjuntos, existe um único j_o tal que $x_0 \in F_{j_0}$.

Considere o aberto

$$\mathscr{O} = \left[\cup_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} F_j \right]^{\mathrm{c}} = \cap_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} F_j^{\mathrm{c}}.$$

Como $\mathscr{O}$ é uma vizinhança de x_0, existe $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathscr{O}$. Como x_k converge para x_0, existe k_0 tal que $x_k \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathscr{O}$ para todo $k \geq k_0$. Assim, $x_k \notin F_j$ para todo $j \neq j_0$, qualquer que seja $k \geq k_0$. Como $x_k \in F$, vemos que $x_k \in F_{j_0}$ para todo $k \geq k_0$ e, portanto, $f(x_k) = \alpha_{j_0}$, para todo $k \geq k_0$. Segue que $f(x_k)$ converge para $\alpha_{j_0} = f(x_0)$. Ou seja, f é contínua em x_0.

$\square$

Demonstração do Teorema de Lusin (Teorema 2.33).

Assuma que f seja mensurável. Logo, por definição de função mensurável, seu domínio E é mensurável.

Pelo Lema 2.34 existe uma sequência de funções simples f_k que converge pontualmente para f em E.

Dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 2.35, para cada k existe um fechado $F_k \subset E$ tal que

1. $m(E \setminus F_k) < \varepsilon 2^{-k-1}$
2. f_k é contínua em F_k.

Suponha que E tenha medida finita.

Pelo Teorema de Egoroff (Teorema 2.32) existe um fechado $F_0 \subset E$ tal que $m(E \setminus F_0) < \varepsilon/2$ e f_k converge uniformemente a f em F_0.

Defina $F = F_0 \cap \cap_{k=1}^{\infty} F_k$. Temos

- F é fechado;
- f_k é contínua em F pois é contínua em $F_k \supset F$;
- $f_k \to f$ uniformemente em F.

Segue que f é contínua em F (*limite uniforme de sequência de funções contínuas é uma função contínua*).

Como,

$$E \setminus F = E \cap [F_0 \cap \cap_{k=1}^{\infty} F_k]^{\mathrm{c}} = E \cap [F_0^{\mathrm{c}} \cup \cup_{k=1}^{\infty} F_k^{\mathrm{c}}]$$

$$= [E \cap F_0^{\mathrm{c}}] \cup [\cup_{k=1}^{\infty} E \cap F_k^{\mathrm{c}}] = [E \setminus F_0] \cup [\cup_{k=1}^{\infty} E \setminus F_k],$$

temos

$$m(E \setminus F) \le m(E \setminus F_0) + \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-k-1} = \varepsilon.$$

Consideremos agora o caso em que $m(E)$ pode ser ∞.

Para $k \in \mathbb{N}$ defina

$$E_k = \{x \in E; k-1 \le |x| < k\} = E \cap [(-k, -k+1] \cup [k-1, k)].$$

Cada E_k é mensurável, tem medida finita e $E_k \cap E_\ell = \varnothing$ se $k \ne \ell$.

Pela parte já demonstrada, existe fechado $F_k \subset E_k$ tal que $m(E_k \setminus F_k) < \varepsilon 2^{-k}$ e f é contínua em F_k.

Coloque $F = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$. Mostremos que F é fechado. Seja $x_0 \in \overline{F}$, isto é, x_0 é limite de uma sequência (x_k), $x_k \in F$.

Tome $j \in \mathbb{N}$ tal que $j - 1 \le |x_0| < j$.

Como x_k converge para x_0, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_1$ então $|x_k - x_0| < (j - |x_0|)/2$. Logo, para $k > k_1$

$$|x_k| \le |x_k - x_0| + |x_0| < \frac{j - |x_0|}{2} + |x_0| = \frac{j + |x_0|}{2} < j.$$

Como $|x_0| \ge j - 1 > j - 2$ temos $|x_0| - j + 2 > 0$. Assim, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_2$ temos $|x_k - x_0| < (|x_0| - j + 2)/2$. Logo, para $k > k_2$

$$|x_k| \ge |x_0| - |x_k - x_0| > |x_0| + \frac{j - 2 - |x_0|}{2} = \frac{j - 2 + |x_0|}{2}$$

$$\ge \frac{j - 2 + j - 1}{2} = j - \frac{3}{2} > j - 2.$$

Ou seja, para $k > k_0 \doteq \max\{k_1, k_2\}$, $j - 2 < |x_k| < j$.

Como $x_k \in F \subset E$, segue que, para $k > k_0$, $x_k \in F_{j-1} \cup F_j$. Mostremos que a partir de um índice temos $x_k \in F_j$. Se isto não acontecesse, teríamos uma subsequência $x_{k_\ell} \in F_{j-1}$. Logo,

$$x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{\ell \to \infty} x_{k_\ell} \in F_{j-1}$$

porque F_{j-1} é fechado. Portanto, $|x_0| < j-1$, o que é contraditório. Logo, $x_k \in F_j$ para todo k suficientemente grande. Como F_j é fechado e x_k converge para x_0, temos $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \in F_j \subset F$, ou seja, F é fechado.

Temos,

$$m(E \setminus F) = m(E \cap (\cap_{k=1}^{\infty} F_k^c)) = m(\cap_{k=1}^{\infty} E \cap F_k^c) = m(\cap_{k=1}^{\infty} E \setminus F_k)$$

$$= m(\cap_{k=1}^{\infty} (\cup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell) \setminus F_k) = m(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{\ell=1}^{\infty} (E_\ell \setminus F_k))$$

$$\leq m(\cup_{\ell=1}^{\infty} (E_\ell \setminus F_\ell)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_\ell \setminus F_\ell) < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\ell} = \varepsilon.$$

Para ver que f é contínua em F, tome $x_0, x_k \in F$ de modo que x_k tenda a x_0. Procedendo como na demonstração de que F é fechado, encontramos $j \geq 1$ e um $k' \geq 1$ tais que $x_0, x_k \in F_j$ se $k \geq k'$. Como f é contínua em F_j, a sequência $f(x_k)$ converge para $f(x_0)$, isto é, f é contínua em x_0, ou seja, f é contínua em F.

Reciprocamente, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ exista fechado $F \subset E$ satisfazendo

1. $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$
2. f é contínua em F.

A condição 1 implica que E é mensurável.

Tomando $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ obtemos fechados $F_k \subset E$ tais que $m(E \setminus F_k) < 1/k$ e f é contínua em F_k.

Sejam $H = \cup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathscr{F}_\sigma$ e $Z = E \setminus H$. O conjunto Z tem medida zero pois para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$m(Z) = m(E \setminus H) \leq m(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in E; f(x) > \alpha\} = \{x \in H; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in Z; f(x) > \alpha\}$$

$$= [\cup_{k=1}^{\infty} \{x \in F_k; f(x) > \alpha\}] \cup \{x \in Z; f(x) > \alpha\}.$$

O conjunto $\{x \in Z; f(x) > \alpha\}$ é mensurável pois está contido em Z que tem medida nula.

Como f é contínua em F_k, existe um aberto $\mathscr{O}_k$ tal que

$$\{x \in F_k; f(x) > \alpha\} = F_k \cap \mathscr{O}_k \in \mathscr{M}.$$

Desta forma, $\{x \in E; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{M}$, ou seja, f é mensurável.

$\square$

Capítulo 3

Integração

A abordagem que usaremos para definir a integral de Lebesgue é como está no livro *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland, 2nd ed., John Wiley & Son, Inc., (1999), 386 páginas.

No livro capítulo 4 do Royden mencionado anteriormente define-se a integral de Lebesgue primeiro para funções limitadas definidas em conjuntos de medida finita e, posteriormente, os casos mais gerais.

Ao final, as duas definições de integral Lebesgue coincidem.

3.1 Integração de funções mensuráveis não negativas

Seja E um conjunto mensurável. Defina

$$L^+(E) = \{f : E \to [0, \infty]; f \text{ é mensurável}\}.$$

Definição 3.1 *Se φ é uma função simples em E que na sua forma normal é dada por*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{3.2}$$

$a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, *definimos sua integral (de Lebesgue) como sendo*

$$\int_E \varphi \doteq \int_E \varphi \, dx \doteq \int_E \varphi(x) \, dx \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j m(E_j) \in [0, \infty],$$

em que se convenciona $0 \cdot \infty = 0$.

Essa convenção serve, por exemplo, para que a integral da função nula definida em $\mathbb{R}$ ($\varphi = 0\chi_{\mathbb{R}}$) seja zero.

No caso em que o conjunto E estiver claro, podemos escrever simplesmente $\int$ ao invés de $\int_E$.

Observação 3.3 *Lembre que na forma normal da função simples é pedido que, com a notação acima,* $a_i \neq a_j$ *se* $i \neq j$. *Vejamos como fica a integral de* φ *dada por* (3.2) *se ela estiver escrita como*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{F_i}, \quad b_i \geq 0, \tag{3.4}$$

pedindo-se apenas que $F_i \cap F_j = \varnothing$ *se* $i \neq j$. *Ou seja, podemos ter* $b_{i_0} = b_{i_1}$ *mesmo que* $i_0 \neq i_1$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, *temos*

$$\varphi^{-1}(\{a_i\}) = E_i = \dot{\cup}_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ b_j = a_i}} F_j$$

e, assim,

$$m(E_i) = \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ b_j = a_i}} m(F_j)$$

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ b_j = a_i}} m(F_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ b_j = a_i}} a_i m(F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ b_j = a_i}} b_j m(F_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j m(F_j).$$

Dessa forma, poderíamos ter definido a integral de $\varphi \geq 0$ *como em* (3.4) *como*

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i m(F_i),$$

lembrando que $F_i \cap F_j = \varnothing$ *se* $i \neq j$.

Se $A \subset E$ é mensurável e $\varphi \geq 0$ é simples, também definimos

$$\int_A \varphi = \int_E \varphi \chi_A.$$

Em particular,

$$\int_A 1 = \int_E \chi_A = 1m(A) = m(A).$$

Proposição 3.5 *Sejam* $\varphi, \psi \in L^+(E)$ *funções simples. Tem-se*

a) *Se* $c \geq 0$ *então* $\int c\varphi = c \int \varphi$.

b) $\int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$.

c) *Se* $\varphi \leq \psi$ *então* $\int \varphi \leq \int \psi$.

Demonstração:
a) O caso $c = 0$ é trivial.
Suponha que $c > 0$. Escreva $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ na forma normal. Temos $c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j}$ e

$$\int c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j m(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j m(E_j) = c \int \varphi.$$

b) Escreva φ e ψ na forma normal:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}.$$

Como $E = \dot{\cup}_{j=1}^{n} E_j = \dot{\cup}_{k=1}^{m} F_k$, obtemos as seguintes reuniões disjuntas

$$E_j = \cup_{k=1}^{m}(E_j \cap F_k) \quad \text{e} \quad F_k = \cup_{j=1}^{n}(E_j \cap F_k).$$

Temos

$$\int \varphi + \int \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j m(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k m(F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j m(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_k m(E_j \cap F_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j + b_k) m(E_j \cap F_k) = \int \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j + b_k)\chi_{E_j \cap F_k} = \int (\varphi + \psi),$$

pois $E_j \cap F_k$ são dois a dois disjuntos e, dessa forma, podemos utilizar o resultado que foi comentado na Observação 3.3.

c) Usaremos a notação da demonstração do item anterior.

Note que se $\varphi \leq \psi$ então $a_j \leq b_k$ sempre que $E_j \cap F_k \neq \varnothing$. Como $m(E_j \cap F_k) = 0$ se $E_j \cap F_k = \varnothing$ então

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j m(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k m(E_j \cap F_k) = \int \psi.$$

□

Observação 3.6 *Seja* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ *uma função simples em* $L^+(E)$*, sem a necessidade que os conjuntos (mensuráveis)* E_i *sejam dois a dois disjuntos. Colocando* $\varphi_i = a_i \chi_{E_i}$*,* $i = 1, \ldots, n$*, temos* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$*. Pelo item (*b) da Proposição 3.5 temos

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i).$$

Definição 3.7 *Seja* $f \in L^+(E)$*. A integral de* f *em* E *é definida por*

$$\int_E f \doteq \int_E f\,dx \doteq \int_E f(x)\,dx \doteq \sup\left\{\int_E \varphi; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

No caso em que E estiver subentendido podemos suprimi-lo da notação.

Se $A \subset E$ é mensurável definimos

$$\int_A f = \int_E f\chi_A.$$

Se $f \in L^+(E)$ usaremos a notação

$$\mathscr{S}_f = \left\{ \int_E \varphi; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Com isso, $\int f = \sup \mathscr{S}_f$.

Observação 3.8 *O item* (c) *da Proposição 3.5 garante que as definições 3.1 e 3.7 coincidem quando $f \geq 0$ é uma função simples.*

Proposição 3.9 *Sejam $f, g \in L^+(E)$. Temos*

a) Se $c \geq 0$ então $\int cf = c \int f$.

b) Se $f \leq g$ então $\int f \leq \int g$.

Demonstração:

a) Se $c = 0$ é trivial.

Suponha $c > 0$. Seja $\varphi \in L^+(E)$ simples. Se $0 \leq \varphi \leq cf$ então $0 \leq \varphi/c \leq f$. Logo,

$$\int \varphi = \int c(\varphi/c) = c \int \varphi/c \leq c \int f$$

e, portanto,

$$\int cf \leq c \int f.$$

Por outro lado,

$$c \int f = c \int \frac{1}{c} \cdot cf \leq c \cdot \frac{1}{c} \int cf = \int cf.$$

b) Como toda $\varphi \in L^+(E)$ simples satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$ também satisfaz $0 \leq \varphi \leq g$, segue que $\mathscr{S}_f \subset \mathscr{S}_g$. Logo, $\int f \leq \int g$.

$\square$

Corolário 3.10 (Desigualdade de Tchebyshev) *Se $f \in L^+(E)$ e $\alpha > 0$ então*

$$m(\{x \in E; f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Demonstração: Se
$$A = \{x \in E; f(x) > \alpha\}$$
então $\alpha \chi_A \leq f$.

Segue que

$$m(\{x \in E; f(x) > \alpha\}) = m(A) = \int \chi_A \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

□

Teorema 3.11 (Teorema da Convergência Monótona) *Se $f_n \in L^+(E)$ é uma sequência crescente que converge para $f : E \to [0, +\infty]$ então*

$$\int f = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração: Como a sequência (f_n) é mensurável e não negativa, seu limite também é mensurável e não negativo. Além do mais, $f_n \leq f$ e, pelo item *(b)* da Proposição 3.9, $\int f_n \leq \int f$.

Seja
$$a_n = \int f_n \in [0, +\infty].$$
Como (f_n) é crescente, a sequência (a_n) também é crescente pelo item *(b)* da Proposição 3.9.

Seja
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n \in [0, +\infty].$$

Note que $a \leq \int f$.

Fixe $\alpha \in (0, 1)$ e tome φ simples satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina,
$$E_n = \{x \in E; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Temos $E_n \subset E_{n+1}$.

Dado $x \in E$, existe n_0 tal que $f(x) \geq f_{n_0}(x) \geq \alpha\varphi(x)$. Para ver isto, observe que se $\varphi(x) = 0$ ou $f(x) = \infty$ então podemos tomar $n_0 = 1$. Agora, se $\varphi(x) > 0$ e $f(x)$ for finito então

$$\alpha\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

e n_0 é obtido pelo fato de

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x).$$

Portanto,

$$E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Como $f_n \geq f_n \chi_{E_n}$ temos

$$\int_E f_n \geq \int_E f_n \chi_{E_n} = \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \varphi = \alpha \int_E \varphi \chi_{E_n}. \tag{3.12}$$

Escrevendo φ na forma normal,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{A_j},$$

temos

$$\int_E \varphi \chi_{E_n} = \int_E \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{A_j \cap E_n} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j m(A_j \cap E_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j m(A_j) = \int_E \varphi, \tag{3.13}$$

pois $A_j \cap E_n$ é crescente (em n),

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_j \cap E_n = A_j \cap \cup_{n=1}^{\infty} E_n = A_j \cap E = A_j$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} m(A_j \cap E_n) = m(A_j).$$

Segue de (3.12) e (3.13) que

$$\alpha \int_E \varphi = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi \chi_{E_n} \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = a, \quad \text{para todo } \alpha \in (0,1).$$

Fazendo $\alpha \to 1-$ obtemos

$$\int_E \varphi \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n,$$

para toda função simples φ, $0 \leq \varphi \leq f$.

Portanto,

$$\int_E f = \sup \mathscr{S}_f \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

$\square$

Proposição 3.14 *Se $f, g \in L^+(E)$ então*

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.34 existem sequências crescentes de funções simples não negativas (φ_n) e (ψ_n) tais que $\varphi_n \nearrow f$ e $\psi_n \nearrow g$. Consequentemente, $\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$.

Segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\int f + \int g = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n = \lim_{n\to\infty} \left[\int \varphi_n + \int \psi_n \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int [\varphi_n + \psi_n] = \int (f+g).$$

$\square$

Teorema 3.15 *Se $f_n \in L^+(E)$ e $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ então*

$$\int f = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Demonstração: Seja

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n.$$

Temos $s_N \in L^+(E)$, $s_N \leq s_{N+1}$ e $s_N \nearrow f$.

Segue da Proposição 3.14 que

$$\int s_N = \sum_{n=1}^{N} \int f_n.$$

Usando o Teorema da Convergência Monótona podemos concluir que

$$\int f = \int \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \int s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

$\square$

Corolário 3.16 *Sejam $f \in L^+(E)$ e $E_n \subset E$, $n \in \mathbb{N}$, mensuráveis e dois a dois disjuntos. Então*

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

Demonstração: Seja $f_n = f\chi_{E_n}$. Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n} = f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = f\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n}.$$

Pelo Teorema 3.15

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \int f\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

□

O Corolário 3.16 mostra que se $f \in L^+(E)$ então

$$\mu(A) = \int_A f, \quad A \in \mathscr{M} \tag{3.17}$$

define uma medida na σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis, isto é, $\mu(\varnothing) = 0$ e se $A_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$, são dois a dois disjuntos então

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Proposição 3.18 *Seja $f \in L^+(E)$. Então $\int f = 0$ se e somente se $f = 0$ quase sempre.*

Demonstração: Se f é simples e escrita na forma normal

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

então

$$\int f = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j m(E_j) = 0 \Leftrightarrow a_j m(E_j) = 0, j = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow a_j = 0 \text{ ou } m(E_j) = 0, j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow f = 0 \text{ q.s.},$$

pois

$$\{x \in E; f(x) \neq 0\} = \cup_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0}}^{n} E_j.$$

Vejamos agora o caso em que $f \in L^+(E)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$F_n = \{x \in E; f(x) > 1/n\}.$$

Temos

$$\{x \in E; f(x) \neq 0\} = \{x \in E; f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Suponha que $\int f = 0$. Se para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tivéssemos $m(F_{n_0}) > 0$ então, como

$$\frac{1}{n_0}\chi_{F_{n_0}} \leq f,$$

teríamos

$$0 < \frac{1}{n_0}m(F_{n_0}) = \int \frac{1}{n_0}\chi_{F_{n_0}} \leq \int f = 0,$$

uma contradição. Logo, $m(F_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$m(\{x \in E; f(x) \neq 0\}) = m(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0,$$

isto é, $f = 0$ quase sempre.

Reciprocamente, se $f = 0$ quase sempre então para toda função simples φ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$ temos $\varphi = 0$ quase sempre pois

$$\{x \in E; \varphi(x) \neq 0\} \subset \{x \in E; f(x) \neq 0\}.$$

Dessa forma, $\mathscr{S}_f = \{0\}$ e, portanto, $\int f = 0$.

$\square$

Corolário 3.19 *Se $f, g \in L^+(E)$ e $f = g$ quase sempre então $\int f = \int g$.*

Demonstração: Sejam $A = \{x \in E; f(x) > g(x)\}$ e $B = \{x \in E; f(x) < g(x)\}$. Temos $A \cap B = \varnothing$ e $m(A) = m(B) = 0$ pois

$$A \cup B = \{x \in E; f(x) \neq g(x)\},$$

que tem medida nula.

Note que $f\chi_A, f\chi_B, g\chi_A, g\chi_B \in L^+(E)$ são iguais a zero quase sempre e, portanto, suas integrais são nulas.

Como $E = A\dot{\cup}B\dot{\cup}(E \setminus (A \cup B))$ e $f\chi_{E\setminus(A\cup B)} = g\chi_{E\setminus(A\cup B)}$, temos

$$\int_E f = \int_E [f\chi_A + f\chi_B + \chi_{E\setminus(A\cup B)}] = \int_E f\chi_A + \int_E f\chi_B + \int_E f\chi_{E\setminus(A\cup B)}$$

$$= \int_E f\chi_{E\setminus(A\cup B)} = \int_E g\chi_{E\setminus(A\cup B)}$$

$$= \int_E g\chi_A + \int_E g\chi_B + \int_E g\chi_{E\setminus(A\cup B)} = \int_E g.$$

□

Vale a seguinte versão mais forte do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 3.20 *Se $f_n \in L^+(E)$ é uma sequência crescente que converge quase sempre para $f : E \to [0, +\infty]$ então*

$$\int f = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração: Seja

$$A = \{x \in E; f_n(x) \nearrow f(x)\}.$$

Por hipótese, $m(E \setminus A) = 0$.

Sejam $g = f\chi_A \in L^+(E)$ e $g_n = f_n\chi_A \in L^+(E)$. Temos $g = f$ q. s., $g_n \leq g_{n+1}$ e $g_n \nearrow f\chi_A = g$.

Pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n.$$

Assim, como $f\chi_{E\setminus A} = 0$ q. s. e $f_n\chi_{E\setminus A} = 0$ q. s., pela Proposição 3.18

$$\int f = \int f(\chi_A + \chi_{E\setminus A}) = \int f\chi_A + \int f\chi_{E\setminus A} = \int f\chi_A = \int g$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_A = \lim_{n\to\infty} \left[\int f_n\chi_A + \int f_n\chi_{E\setminus A}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \left[f_n\chi_A + f_n\chi_{E\setminus A}\right] = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

Lema 3.21 (Lema de Fatou) *Dada uma sequência de funções $f_n \in L^+(E)$, tem-se*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração: Para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\inf_{n \geq k} f_n \leq f_j, \quad \text{para todo } j \geq k.$$

Portanto,

$$\int \inf_{n \geq k} f_n \leq \int f_j, \quad \text{para todo } j \geq k,$$

$$\int \inf_{n \geq k} f_n \leq \inf_{j \geq k} \int f_j. \tag{3.22}$$

Coloque

$$g_k \doteq \inf_{n \geq k} f_n.$$

Temos $g_k \leq g_{k+1}$ e

$$\lim_{k \to \infty} g_k = \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} f_n = \liminf_{n \to \infty} f_n.$$

Assim, aplicando o Teorema da Convergência Monótona à sequência (g_k)

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n = \int \lim_{k \to \infty} g_k = \lim_{k \to \infty} \int g_k = \lim_{k \to \infty} \int \inf_{n \geq k} f_n$$

$$\overset{(3.22)}{\leq} \lim_{k \to \infty} \inf_{j \geq k} \int f_j = \liminf_{j \to \infty} \int f_j.$$

□

Corolário 3.23 *Dada uma sequência de funções $f_n \in L^+(E)$ que converge quase sempre para $f : E \to [0, +\infty]$ tem-se*

$$\int f \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n.$$

Demonstração: Seja

$$A = \{x \in E; f_n(x) \to f(x)\}.$$

Por hipótese, $m(E \setminus A) = 0$.

Sejam $g = f\chi_A \in L^+(E)$ e $g_n = f_n\chi_A \in L^+(E)$. Temos $g = f$ q. s. e $g_n \to f\chi_A = g$.

Pelo Lema de Fatou

$$\int f = \int g = \int \lim_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

Proposição 3.24 *Seja $E \in \mathscr{M}$. Se $f \in L^+(E)$ e $\int f < \infty$ então $\{x; f(x) = \infty\}$ tem medida nula, isto é, f é finita quase sempre.*

Demonstração:
Seja $Z \doteq \{x \in E; f(x) = \infty\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $n\chi_Z \leq f$.
Se $m(Z) \in (0, \infty]$ então

$$\infty = \lim_{n\to\infty} nm(Z) = \lim_{n\to\infty} \int n\chi_Z \leq \int f,$$

uma contradição. Portanto, $Z = \{x \in E; f(x) = \infty\}$ tem medida nula.

□

Vejamos agora em que caso podemos definir a integral de uma função mensurável.

Dado $-\infty \leq a \leq +\infty$ usaremos a seguinte notação $a^+ = \max\{a, 0\}$ e $a^- = \max\{-a, 0\}$. Temos $a^+, a^- \geq 0$, $a = a^+ - a^-$ e $|a| = a^+ + a^-$.

Dada uma função $f : E \to [-\infty, +\infty]$ definimos $f^+, f^- : E \to [0, +\infty]$ por $f^+(x) = (f(x))^+$ e $f^-(x) = (f(x))^-$, $x \in E$. Claramente, $f^+ - f^- = f$ e $f^+ + f^- = |f|$. Também é evidente que se f for mensurável então f^+ e f^- também são.

Definição 3.25 *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ e f uma função mensurável definida em E a valores reais estendidos. Dizemos que a integral de f existe se pelo menos uma das integrais $\int f^+$ ou $\int f^-$ for finita. Neste caso, a integral de f em E definida por*

$$\int_E f \doteq \int_E f\,dx \doteq \int_E f(x)\,dx = \int_E f^+ - \int_E f^- \in [-\infty, +\infty].$$

Se $A \subset E$ é mensurável e uma das integrais $\int (f\chi_A)^+ = \int f^+\chi_A$ ou $\int (f\chi_A)^- = \int f^-\chi_A$ for finita definimos

$$\int_A f \doteq \int_E f\chi_A$$

Quando o conjunto E estiver subentendido podemos omiti-lo da notação da integral.

Definição 3.26 *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ mensurável e f uma função mensurável definida em E a valores reais estendidos. Se as duas integrais $\int f^+$ e $\int f^-$ são finitas diremos que f é integrável.*

Observação 3.27 *Note que se f é integrável então $|f| = f^+ + f^-$ é integrável pois $|f|^+ = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$. Reciprocamente, se $|f|$ é integrável então f é integrável pois $0 \leq f^\pm \leq |f|$.*

O conjunto das funções mensuráveis a *valores reais* definidas em E que são integráveis será denotado por $\mathscr{L}^1(E)$.

Segue da Observação 3.27 que se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável então $f \in \mathscr{L}^1(E)$ se e somente se $|f| \in \mathscr{L}^1(E)$.

Proposição 3.28 *$\mathscr{L}^1(E)$ é um espaço vetorial e $f \mapsto \int f$ é um funcional linear definido em $\mathscr{L}^1(E)$.*

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Temos

$$\int |af + bg| \leq |a| \int |f| + |b| \int |g| < \infty.$$

Portanto, $af + bg \in \mathscr{L}^1(E)$.

Como

$$[af]^\pm = \begin{cases} af^\pm & \text{se } a \geq 0 \\ \\ |a|f^\mp & \text{se } a < 0 \end{cases},$$

obtemos

$$\int af = \int [af]^+ - \int [af]^- = \begin{cases} \int af^+ - \int af^- & \text{se } a \geq 0 \\ \\ \int |a|f^- - \int |a|f^+ & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a\left[\int f^+ - \int f^-\right] & \text{se } a \geq 0 \\ \\ -|a|\left[\int f^+ - \int f^-\right] & \text{se } a < 0 \end{cases} = a\int f.$$

Seja $h \doteq f + g$. Temos

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$$

e, como cada integral acima é finita (lembre que $h = f + g \in \mathscr{L}^1$ pelo que já mostramos), temos

$$\int (f+g) = \int h \overset{\text{def}}{=} \int h^+ - \int h^-$$

$$= \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g.$$

□

Proposição 3.29 *Se $f \in \mathscr{L}^1(E)$ então $|\int f| \leq \int |f|$.*

Demonstração:

$$|\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f|.$$

□

Corolário 3.30 *Se $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$ são iguais quase sempre então $\int f = \int g$.*

Demonstração: Note que a função $|f-g|$ é igual a zero quase sempre. Portanto, pelas proposições 3.29 e 3.18 obtemos

$$|\int f - \int g| = |\int (f-g)| \leq \int |f-g| = 0.$$

□

Proposição 3.31 *Seja $X \in \mathscr{M}$. Se $f, g \in \mathscr{L}^1(X)$ são equivalentes:*

a) Para todo $E \in \mathscr{M}$, $E \subset X$, tem-se $\int_E f = \int_E g$.

b) $\int_X |f-g| = 0$.

c) $f = g$ quase sempre.

Demonstração: Seja $h = f - g$. O resultado a ser mostrado é que as seguintes afirmações são equivalentes:

A) Para todo $E \in \mathscr{M}$ tem-se $\int_E h = 0$.

B) $\int_X |h| = 0$.

C) $h = 0$ quase sempre.

Pela Proposição 3.18 segue que *(B)* é equivalente a $|h| = 0$ quase sempre que é o mesmo que *(C)*.

Mostremos que *(B)* $\Rightarrow$ *(A)*.

Dado $E \in \mathscr{M}$ temos

$$\left|\int_E h\right| \leq \int_E |h| \leq \int_X |h| = 0.$$

Mostremos que *(A)* $\Rightarrow$ *(C)*.

Suponha que *(C)* seja falso, isto é, h não é igual a zero quase sempre. Logo existe $F \in \mathscr{M}$ tal que $m(F) > 0$ e $h(x) \neq 0$ para todo $x \in F$.

Note que h^+ e h^- não podem ser ambas iguais a zero quase sempre em F. Vamos supor que h^+ não é nula quase sempre em F. Dessa forma, existe $H \subset F$, $H \in \mathscr{M}$ tal que $m(H) > 0$ e $h^+ > 0$ em H; portanto, $h^- = 0$ em H.

Temos

$$H = \{x \in H; h^+(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in H; h^+(x) > 1/n\}.$$

Como $m(H) > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(\{x \in H; h^+(x) > 1/n\}) > 0.$$

Coloque

$$H_n \doteq m(\{x \in H; h^+(x) > 1/n\}.$$

Temos

$$\int_{H_n} h = \int_{H_n} (h^+ - h^-) = \int_{H_n} h^+ \geq \frac{1}{n}\int_{H_n} dx = \frac{1}{n} m(H_n) > 0,$$

portanto, $\int_{H_n} h \neq 0$, contradizendo *(A)* com $E = H_n \in \mathscr{M}$.

$\square$

Vejamos a seguir um dos principais teoremas da Análise

Teorema 3.32 (Teorema da Convergência Dominada) *Dadas uma sequência de funções mensuráveis $f_n : E \to \mathbb{R}$ que converge quase sempre para uma função f e uma função $g \in \mathscr{L}^1(E)$ satisfazendo $|f_n| \leq g$ quase sempre para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $f \in \mathscr{L}^1(E)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Demonstração:

Mostremos primeiramente o resultado supondo que f_n converge em todos os pontos de E para f e que $|f_n| \leq g$ em E. Note que $f_n \in \mathscr{L}^1(E)$.

Como $g + f_n \geq 0$ e $g - f_n \geq 0$, pelo Lema de Fatou obtemos

$$\int g + \int f = \int (g + f) = \int \lim_{n\to\infty} (g + f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n)$$

$$= \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

ou seja,

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.33}$$

Também,

$$\int g - \int f = \int (g - f) = \int \lim_{n\to\infty} (g - f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)$$

$$= \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f. \tag{3.34}$$

Combinando (3.33) e (3.34),

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Para o caso geral, considere

$$Z = \{x \in E; f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in E; |f_n(x)| > g(x)\}.$$

Pelas hipóteses, $m(Z) = 0$. Coloque $A = E \setminus Z$.

Se definirmos $\widetilde{f} = f\chi_A$, $\widetilde{f_n} = f_n\chi_A$ e $\widetilde{g} = g\chi_A$ então teremos para *todo* $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(x) = \widetilde{f}(x) \quad \text{e} \quad |\widetilde{f}_n(x)| \leq \widetilde{g}(x). \tag{3.35}$$

Portanto,

$$|\widetilde{f}(x)| \leq \widetilde{g}(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E. \tag{3.36}$$

Claramente valem as seguintes igualdades quase sempre: $f_n = \widetilde{f}_n$, $f = \widetilde{f}$ e $g = \widetilde{g}$.

Como pelo Corolário 3.30 temos

$$\int_E f_n = \int_E \widetilde{f}_n \qquad \text{e} \qquad \int_E f = \int_E \widetilde{f},$$

segue do que já foi demonstrado que

□

Exemplo 3.37 *Considere a sequência* $f_n = \chi_{[-n,n]} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. *Note que*

$$f_n \to f \equiv 1 \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R}).$$

Isto acontece porque não existe $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *tal que* $|f_n| \leq g$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 3.38 (Teorema da Convergência Limitada) *Seja* $E \subset \mathbb{R}$ *um conjunto de medida finita. Dadas uma sequência de funções* $f_n \in \mathscr{L}^1(E)$ *que converge quase sempre para uma função* f *e uma constante* $M \geq 0$ *satisfazendo* $|f_n| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se que* $f \in \mathscr{L}^1(E)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Demonstração:

Basta tomar $g = M \in \mathscr{L}^1(E)$ e aplicar o Teorema da Convergência Dominada.

□

A próxima proposição pode ser vista como uma certa continuidade da medida definida em 3.17 no caso em que $f \geq 0$ é integrável.

Proposição 3.39 *Seja* $f \in \mathscr{L}^1(E)$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $A \subset E$, $A \in \mathscr{M}$, *com* $m(A) < \delta$ *tem-se*

$$0 \leq \int_A |f| < \varepsilon.$$

Demonstração:

Defina a sequência de funções mensuráveis

$$g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\} = \begin{cases} |f(x)| & \text{se} \quad |f(x)| \leq n \\ \\ n & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

É fácil ver que a sequência é crescente e $g_n \nearrow |f|$.

Pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n = \int_E |f| < \infty.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_E g_N > \int_E |f| - \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é,

$$\int_E (|f| - g_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $0 < \delta < \varepsilon/(2N)$. Se $A \subset E$ é mensurável e $m(A) < \delta$ então

$$\int_A |f| = \int_A (|f| - g_N) + \int_A g_N \leq \int_E (|f| - g_N) + \int_A g_N$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + Nm(A) < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definição 3.40 *Seja I um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $[a_n, b_n] \subset I$ e $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, são intervalos abertos dois a dois disjuntos satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \delta$ então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

Exercício 3.41 *Mostre que toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua.*

Definição 3.42 *Sejam $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$. Para $x \in \mathbb{R}$ defina $F_a \doteq F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{[a,x]} f & \text{se } x \geq a \\ \\ -\int_{[x,a]} f & \text{se } x < a \end{cases}.$$

Exercício 3.43 *Se F é como acima, mostre que*

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Corolário 3.44 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável e $a \in \mathbb{R}$ então*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é absolutamente contínua.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta > 0$ como na Proposição 3.39.

Se $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, são intervalos abertos dois a dois disjuntos satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \delta$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(b_n) - F(a_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\int_{(a_n,b_n]} f| = \sum_{n=1}^{\infty} |\int_{(a_n,b_n)} f|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(a_n,b_n)} |f| = \int_{\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)} |f| < \varepsilon,$$

pois

$$m(\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \delta.$$

□

Teorema 3.45 *Seja $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$. Dado $\varepsilon > 0$ existem uma função simples φ, uma função escada ψ e uma função contínua g definidas em $[a,b]$ tais que*

$$\int |f-\varphi| < \varepsilon, \quad \int |f-\psi| < \varepsilon \quad \textit{e} \quad \int |f-g| < \varepsilon.$$

Demonstração: Podemos supor nos três casos que $f \geq 0$ pois, para quaisquer funções integráveis h_1 h_2 tem-se

$$\int |f-(h_1-h_2)| \leq \int |f^+ - h_1| + \int |f^- - h_2|,$$

ou seja, prova-se o teorema para $f^{\pm}$ e a desigualdade acima mostra que o resultado é válido para f pois diferença de funções simples é função simples, diferença de funções escadas é função escada e diferença de funções contínuas é função contínua.

Suponha que tenhamos provado o teorema para funções de $\mathscr{L}^1([a,b])$ que sejam não negativas e limitadas.

Dada $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$ não negativa defina $f_n = \min\{f, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Temos $f_n \in \mathscr{L}^1([a,b])$, $0 \leq f_n \leq n$, $f_n \leq f_{n+1}$ e $f_n \nearrow f$.

Segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\int |f-f_n| = \int (f-f_n) = \int f - \int f_n \to 0.$$

Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |f-f_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam φ, ψ e g, respectivamente, simples, escada e contínua satisfazendo

$$\int |f_N-\varphi| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int |f_N-\psi| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int |f_N-g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue que

$$\int |f-\varphi| \leq \int |f-f_N| + \int |f_N-\varphi| < \varepsilon,$$

$$\int |f-\psi| \leq \int |f-f_N| + \int |f_N-\psi| < \varepsilon$$

e

$$\int |f-g| \leq \int |f-f_N| + \int |f_N-g| < \varepsilon.$$

Para finalizar, mostremos agora que o resultado é válido se $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$ é não negativa e limitada.

Pelo Lema 2.34 existe uma sequência crescente de funções simples φ_n definidas em $[a,b]$ tais que $0 \leq \varphi_n \leq f$ e $\varphi_n \nearrow f$ (uniformemente) em $[a,b]$.

Existência da função simples:

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n.$$

Como f é integrável, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq \int f - \int \varphi_N < \varepsilon,$$

isto é,

$$\int |f-\varphi_N| = \int f - \int \varphi_N < \varepsilon.$$

Existência da função escada:

Dado $\varepsilon > 0$, pela demonstração do item anterior existe uma função simples $0 \leq \varphi \leq f$ tal que

$$\int |f-\varphi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Coloque $\varepsilon' = \varepsilon/2(1+b-a+2\sup f)$. Pelo Lema 2.27 existe uma função escada ψ definida em $[a,b]$ tal que

$$m(\{x \in [a,b]; \psi(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon'$$

e $0 \leq \psi \leq \max \varphi \leq \sup f$.

Note que

$$m(\{x \in [a,b]; |\psi(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon'\}) \leq m(\{x \in [a,b]; \psi(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon'.$$

Temos

$$\int |f-\psi| \leq \int |f-\varphi| + \int |\varphi-\psi| < \frac{\varepsilon}{2} + \int |\varphi-\psi|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\{x;|\psi(x)-\varphi(x)|\geq\varepsilon'\}} \underbrace{|\varphi-\psi|}_{\leq 2\sup f} + \int_{\{x;|\psi(x)-\varphi(x)|<\varepsilon'\}} \underbrace{|\varphi-\psi|}_{<\varepsilon'}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (2\sup f)m(\{x \in [a,b]; |\psi(x)-\varphi(x)| \geq \varepsilon'\}) + \varepsilon' m(\{x; |\psi(x)-\varphi(x)| < \varepsilon'\})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (2\sup f)\varepsilon' + \varepsilon'(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon'[2\sup f + b - a]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon[2\sup f + b - a]}{2(1+b-a+2\sup f)} = \frac{\varepsilon}{2}\left[1 + \frac{2\sup f + b - a}{2(1+b-a+2\sup f)}\right]$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Existência da função contínua: Dado $\varepsilon > 0$ coloque ε' como acima. Pelo que foi provado acima, existe uma função escada ψ tal que

$$0 \leq \psi \leq \sup f \quad \text{e} \quad \int |f-\psi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pelo Lema 2.25 existe uma função contínua g definida em $[a,b]$ satisfazendo $0 \leq g \leq \sup f$ e

$$m(\{x \in [a,b]; \psi(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon'.$$

Como acima temos

$$m(\{x \in [a,b]; |\psi(x) - g(x)| \geq \varepsilon'\}) \leq m(\{x \in [a,b]; \psi(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon'$$

e
$$\int |f-g| \le \int |f-\psi| + \int |\psi - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \int |\psi - g|$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\{x;|\psi(x)-g(x)|\ge\varepsilon'\}} \underbrace{|g-\psi|}_{\le 2\sup f} + \int_{\{x;|\psi(x)-g(x)|<\varepsilon'\}} \underbrace{|g-\psi|}_{<\varepsilon'}$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + (2\sup f)m(\{x\in[a,b]; |\psi(x)-g(x)|\ge\varepsilon'\}) + \varepsilon' m(\{x; |\psi(x)-g(x)|<\varepsilon'\})$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + (2\sup f)\varepsilon' + \varepsilon'(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon'[2\sup f + b - a]$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon[2\sup f + b - a]}{2(1+b-a+2\sup f)} = \frac{\varepsilon}{2}\left[1 + \frac{2\sup f + b - a}{2(1+b-a+2\sup f)}\right]$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

□

Ex. Resolvido 3.46 *Sejam $c>0$ e $f:[a,b+c]\to\mathbb{R}$ integrável. Então*
$$\int_{[a,b]} f(x+c)\,dx = \int_{[a+c,b+c]} f(x)\,dx.$$

Resolução: Mostremos primeiramente que o resultado vale para funções características de conjuntos mensuráveis. Seja $E\in\mathscr{M}$.

Como
$$x+c\in E \Leftrightarrow x\in E-c$$
temos
$$\chi_E(x+c) = \chi_{E-c}(x).$$

Também,
$$[a,b]\cap(E-c) = [a+c,b+c]\cap E - c,$$

pois

$$\begin{aligned} x \in [a,b] \cap (E-c) &\Leftrightarrow \exists y \in E \text{ tal que } a \leq x = y - c \leq b \\ &\Leftrightarrow \exists y \in E \text{ tal que } x = y - c \text{ e } a + c \leq y \leq b + c \\ &\Leftrightarrow \exists y \in E \cap [a+c, b+c] \text{ tal que } x = y - c \\ &\Leftrightarrow x \in E \cap [a+c,b+c] - c = [a+c,b+c] \cap E - c. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{[a,b]} \chi_E(x+c)\, dx = \int_{[a,b]} \chi_{E-c}(x)\, dx = m([a,b] \cap (E-c))$$

$$= m([a+c,b+c] \cap E - c) = m([a+c,b+c] \cap E) = \int_{[a+c,b+c]} \chi_E(x)\, dx.$$

A linearidade da integral mostra que o resultado é válido para funções simples.

Se $f \geq 0$ tome uma sequência φ_n de funções simples satisfazendo $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ e φ_n convergindo para f em $[a, b+c]$. Claramente, $\psi_n(x) \doteq \varphi_n(x+c)$ é simples, $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}$ e $\psi_n(x)$ converge para $f(x+c)$ se $x \in [a,b]$.

Pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int_{[a,b]} f(x+c)\, dx = \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n(x)\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n(x+c)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a+c,b+c]} \varphi_n(x)\, dx = \int_{[a+c,b+c]} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\, dx$$

$$= \int_{[a+c,b+c]} f(x)\, dx.$$

No caso geral,

$$\int_{[a,b]} f(x+c)\, dx = \int_{[a,b]} f^+(x+c)\, dx - \int_{[a,b]} f^-(x+c)\, dx =$$

$$= \int_{[a+c,b+c]} f^+(x)\, dx - \int_{[a+c,b+c]} f^-(x)\, dx = \int_{[a+c,b+c]} [f^+(x) - f^-(x)]\, dx$$

$$= \int_{[a+c,b+c]} f(x)\, dx.$$

■

3.2 Comparação entre as integrais de Lebesgue e de Riemann para funções limitadas definidas em intervalos compactos

O próximo resultado caracteriza funções mensuráveis limitadas definidas em conjuntos de medida finita. Este resultado será útil para mostrar que se uma função limitada definida num intervalo $[a,b]$ for Riemann integrável então ela também será Lebesgue integrável, isto é, pertencerá a $\mathscr{L}^1([a,b])$. Além do mais, as duas definições de integral, a de Riemann e a de Lebesgue, coincidem.

Proposição 3.47 *Sejam $E \in \mathscr{M}$ de medida finita e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função limitada.*

São equivalentes:

a) $\inf\{\int \psi; \psi$ *é simples e* $f \leq \psi\} = \sup\{\int \varphi; \varphi$ *é simples e* $\varphi \leq f\}$;

b) f *é mensurável.*

Demonstração: Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in E$.
Suponha que f seja mensurável.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{-n, \dots, n\}$ defina

$$\begin{aligned} E_k &= \{x \in E; (k-1)\frac{M}{n} < f(x) \leq k\frac{M}{n}\} \\ &= f^{-1}(((k-1)\frac{M}{n}, k\frac{M}{n}]) \in \mathscr{M}. \end{aligned}$$

Se $x \in E$ então $-M < f(x) < M$. Como

$$(-M, M) \subset (-\frac{n+1}{n}M, M] = \cup_{k=-n}^{n}((k-1)\frac{M}{n}, k\frac{M}{n}],$$

segue que

$$E = \cup_{k=-n}^{n} E_k \quad \text{e} \quad m(E) = \sum_{k=-n}^{n} m(E_k),$$

pois a união é disjunta.

Defina as funções simples

$$\psi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k} \quad \text{e} \quad \varphi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}(k-1)\chi_{E_k}.$$

Temos $\varphi_n \le f \le \psi_n$ e, portanto,

$$\inf\{\int \psi; \psi \text{ é simples e } f \le \psi\} \le \int \psi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} k m(E_k)$$

e

$$\sup\{\int \varphi; \varphi \text{ é simples e } \varphi \le f\} \ge \int \varphi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}(k-1)m(E_k).$$

Assim,

$$0 \le \inf\{\int \psi; \psi \text{ é simples e } f \le \psi\} - \sup\{\int \varphi; \varphi \text{ é simples e } \varphi \le f\}$$

$$\le \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} m(E_k) = \frac{M}{n}m(E) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Portanto, *(b)* implica *(a)*.

Reciprocamente, suponha que

$$I \doteq \inf\{\int \psi; \psi \text{ é simples e } f \le \psi\} = \sup\{\int \varphi; \varphi \text{ é simples e } \varphi \le f\}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ existem funções simples φ_n e ψ_n tais que

$$\varphi_n \le f \le \psi_n, \quad I - \frac{1}{2n} < \int \varphi_n \le I \le \int \psi_n < I + \frac{1}{2n}.$$

Portanto,

$$0 \le \int (\psi_n - \varphi_n) = \int \psi_n - \int \varphi_n < \frac{1}{n}.$$

Defina
$$\psi^* = \inf_n \psi_n \quad \text{e} \quad \varphi^* = \sup_n \varphi_n.$$
Pela Proposição 2.15 ψ^* e φ^* são mensuráveis. Temos também
$$\varphi^* \leq f \leq \psi^*.$$

Defina também
$$\Delta = \{x \in E; \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$$
e para $\nu, n \in \mathbb{N}$
$$\Delta_\nu = \{x \in E; \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu}\} \quad \text{e} \quad \Delta_\nu^{(n)} = \{x \in E; \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{\nu}\}.$$

Temos
$$\Delta = \cup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu \quad \text{e} \quad \Delta_\nu \subset \Delta_\nu^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Agora,
$$m(\Delta_\nu^{(n)}) = \int \chi_{\Delta_\nu^{(n)}} = \int_{\Delta_\nu^{(n)}} 1 = \int_{\{x \in E; \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{\nu}\}} 1$$
$$= \int_{\{x \in E; 1 < \nu(\psi_n(x) - \varphi_n(x))\}} 1 \leq \int_E \nu(\psi_n - \varphi_n) < \frac{\nu}{n}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$m(\Delta_\nu) \leq m(\Delta_\nu^{(n)}) < \frac{\nu}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty,$$
ou seja, $m(\Delta_\nu) = 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $m(\Delta) = 0$.

Portanto, $\psi^* = \varphi^*$ quase sempre. Mas, como $\psi^* \leq f \leq \varphi^*$, segue que $f = \psi^* = \varphi^*$ quase sempre e, pela Proposição 2.19, temos que f é mensurável.

□

Lembremos a definição da integral de Riemann.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja
$$\mathscr{P} : a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

uma partição de $[a,b]$. Para $i = 1, \dots, n-1$ coloque $I_i = [x_{i-1}, x_i)$ e $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Para $i = 1, \dots, n$ defina $m_i = \inf_{I_i} f$ e $M_i = \sup_{I_i} f$.

Considere as seguintes funções escadas associadas à partição $\mathscr{P}$:

$$\varphi_{\mathscr{P}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{I_i} \quad \text{e} \quad \psi_{\mathscr{P}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{I_i}.$$

Claramente, $\varphi_{\mathscr{P}} \leq f \leq \psi_{\mathscr{P}}$.

As integrais superior e inferior de Riemann de f são definidas, respectivamente, por

$$\mathscr{R}\overline{\int_a^b} f = \inf\{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}); \mathscr{P} : x_0 < \cdots < x_n \text{ é partição de } [a,b]\}$$

$$= \inf\{\int_{[a,b]} \psi_{\mathscr{P}}; \mathscr{P} : x_0 < \cdots < x_n \text{ é partição de } [a,b]\}$$

e

$$\mathscr{R}\underline{\int_a^b} f = \sup\{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}); \mathscr{P} : x_0 < \cdots < x_n \text{ é partição de } [a,b]\}$$

$$= \sup\{\int_{[a,b]} \varphi_{\mathscr{P}}; \mathscr{P} : x_0 < \cdots < x_n \text{ é partição de } [a,b]\}$$

Definição 3.48 *Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann se $\mathscr{R}\overline{\int_a^b} f = \mathscr{R}\underline{\int_a^b} f$. Neste caso, a integral de Riemann de f é dada por*

$$\mathscr{R}\int_a^b f \doteq \mathscr{R}\overline{\int_a^b} f = \mathscr{R}\underline{\int_a^b} f.$$

Exercício 3.49 *Mostre que*

1. *o conjunto das funções limitadas integráveis segundo Riemann em $[a,b]$, $\mathfrak{R}[a,b]$, com as operações usuais é um espaço vetorial;*

2. *as funções contínuas em* $[a,b]$ *formam um subespaço vetorial de* $\mathfrak{R}[a,b]$.

3. $\mathfrak{R}[a,b] \ni f \mapsto \mathscr{R}\int_a^b f \in \mathbb{R}$ *é um funcional linear;*

4. *se* M *é constante então* $\mathscr{R}\int_a^b M = M(b-a)$.

Teorema 3.50 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada que é integrável segundo Riemann. Então* f *é mensurável e*

$$\mathscr{R}\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Demonstração: Vamos mostrar primeiro quando $f \geq 0$.

Como toda função escada é função simples, temos

$$\mathscr{R}\int_a^b f = \mathscr{R}\underline{\int_a^b} f = \sup\{\int_{[a,b]} \varphi_{\mathscr{P}}; \mathscr{P} : x_0 < \cdots < x_n \text{ é partição de } [a,b]\}$$

$$\leq \sup\{\int_{[a,b]} \varphi; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f\} \leq \inf\{\int_{[a,b]} \psi; \psi \text{ é simples e } \psi \geq f\}$$

$$\leq \inf\{\int_{[a,b]} \psi_{\mathscr{P}}; \mathscr{P} : x_0 < \cdots < x_n \text{ é partição de } [a,b]\} = \mathscr{R}\overline{\int_a^b} f = \mathscr{R}\int_a^b f.$$

Assim, todas desigualdades acima são, na verdade, igualdades.

Como

$$\inf\{\int_{[a,b]} \psi; \psi \text{ é simples e } \psi \geq f\} = \sup\{\int_{[a,b]} \varphi; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f\}$$

$$\leq \sup\{\int_{[a,b]} \varphi; \varphi \text{ é simples e } \varphi \leq f\} \leq \inf\{\int \psi; \psi \text{ é simples e } f \leq \psi\},$$

segue da Proposição 3.47 que f é mensurável. Além do mais, temos

$$\mathscr{R}\int_a^b f = \sup\{\int_{[a,b]} \varphi; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f\},$$

ou seja,

$$\mathscr{R}\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Para mostrar o caso geral, como f é limitada, tome $M > 0$ tal que $g \doteq f + M \geq 0$. Como f é integrável segundo Riemann e M é constante, g é integrável segundo Riemann. Logo, g é mensurável e $\int_{[a,b]} g = \mathscr{R}\int_a^b g$.

Portanto, $f = g - M$ é mensurável e

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} (g - M) = \int_{[a,b]} g - M(b-a)$$

$$= \mathscr{R}\int_a^b g - \mathscr{R}\int_a^b M = \mathscr{R}\int_a^b (g - M) = \mathscr{R}\int_a^b f.$$

□

Se considerarmos as integrais impróprias de Riemann, o resultado acima não precisa ser válido.

Exercício 3.51 *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é integrável segundo Riemann em $\mathbb{R}$ mas sua integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$ não existe.

3.3 Derivação sob o sinal de integração

Teorema 3.52 *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e $f : E \times [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que a função*

$$\begin{aligned} f_t : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

seja integrável para todo $t \in [a, b]$.

Coloque

$$F(t) = \int_E f_t(x)\, dx = \int_E f(x, t)\, dx.$$

(a) *Suponha que exista* $g \in \mathscr{L}^1(E)$ *tal que* $|f(x, t)| \leq g(x)$ *para todo* $(x, t) \in E \times [a, b]$.

Se para $t_0 \in [a, b]$ *tem-se*

$$\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0), \quad \textit{para todo } x \in E,$$

então

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0),$$

isto é,

$$\lim_{t \to t_0} \int_E f(x, t)\, dx = \int_E \lim_{t \to t_0} f(x, t)\, dx = \int_E f(x, t_0)\, dx.$$

Em particular, se $t \mapsto f(x, t)$ *é contínua para cada* $x \in E$ *então* F *é contínua.*

(b) *Suponha que* $\partial f / \partial t$ *exista em todos os pontos e que exista* $g \in \mathscr{L}^1(E)$ *tal que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \textit{para todo } (x, t) \in E \times [a, b].$$

Então $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ *é mensurável para todo* $t \in [a, b]$, F *é diferenciável e*

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int_E f(x, t)\, dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx.$$

Demonstração:

(a) Seja $t_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $t_n \to t_0$.

Defina $g_n(x) = f(x, t_n)$. Por hipótese, $g_n(x) \to f(x, t_0)$ e $|g_n| \leq g \in \mathscr{L}^1(E)$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$F(t_0) = \int_E f(x,t_0)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f(x,t_n)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f(x,t_n)\,dx = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

(b) Sejam $t_0, t_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $t_n \neq t_0$ e $t_n \to t_0$.
Note que

$$h_n(x) \doteq \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$$

Portanto, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ é mensurável.

Como $t \mapsto f(x,t)$ é derivável em $[a,b]$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\overline{t_n}$ entre t_n e t_0 tal que

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,\overline{t_n}).$$

Logo,

$$|h_n(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\overline{t_n})\right| \leq g(x).$$

Segue novamente do Teorema da Convergência Dominada que

$$F'(t_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n - t_0}\left[\int_E f(x,t_n)\,dx - \int_E f(x,t_0)\,dx\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E h_n(x)\,dx$$

$$= \int_E \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx.$$

$\square$

3.4 O espaço $L^1(E)$

Sejam $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Pelo que já vimos, valem as seguintes propriedades

1. $\int |\lambda f| = |\lambda| \int |f|$
2. $\int |f+g| \leq \int [|f| + |g|] = \int |f| + \int |g|$
3. $\int |f| \geq 0$
4. $\int |f| = 0$ se e somente se $|f| = 0$ quase sempre, que é o mesmo que $f = 0$ quase sempre.

Ou seja, $||f||_1 = \int |f|$ definiria uma norma em $\mathscr{L}^1(E)$ se ao invés do item 4 acima tivéssemos $\int |f| = 0$ se e somente se $f = 0$.

Para contornar esta dificuldade, consideremos a seguinte relação em $\mathscr{L}^1(E)$: dizemos que $f \sim g$, $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$, se $f = g$ quase sempre. É fácil ver que esta relação é uma relação de equivalência.

Definimos

$$L^1(E) = \mathscr{L}^1(E)/\sim = \{[f]; f \in \mathscr{L}^1(E)\},$$

sendo $[f]$ a classe de equivalência de f.

Note que se $f \sim g$ então $\int f = \int g$. Dessa forma, fica bem definido colocar

$$||[f]||_1 = \int |f|.$$

Esta quantidade define uma norma em $L^1(E)$ pois agora $||[f]||_1 = 0$ se e somente $f = 0$ quase sempre, isto é, $[f] = 0$ é a classe nula.

Na prática usa-se um abuso de notação e denota-se $[f]$ por f mesmo. Alguns cuidados devem ser tomados quando operamos com os elementos de $L^1(E)$. Por exemplo, não fica bem definido falarmos do valor que um elemento de $L^1(E)$ assume em pontos de E. Sempre que formos definir algo relativo aos elementos (classes de equivalências) de $L^1(E)$ é preciso ver se a definição é independente do elemento que representa a classe de equivalência.

Pode-se provar que $L^1(E)$ munido com a norma acima se torna um espaço vetorial normado completo com relação à distância induzida por esta norma, isto é, $d_1(f,g) = ||f-g||_1$. Ser completo significa que se (f_n) é uma sequência de Cauchy com relação à distância d_1 então (f_n) converge para algum elemento de $L^1(E)$, isto é, existe $f \in L^1(E)$ tal que

$$||f_n - f||_1 = \int |f_n - f| \longrightarrow 0.$$

Finalmente, o Teorema 3.45 mostra que o conjunto das funções simples em $[a,b]$, o conjunto das funções escadas em $[a,b]$ e das funções contínuas em $[a,b]$ são densos em $L^1([a,b])$.

Capítulo 4

Diferenciação e integração

As notas deste capítulo são baseadas no capítulo 5 do livro do Royden e em partes do capítulo 7 do livro de Wheeden & Zygmund, ambos mencionados anteriormente.

Um dos objetivos deste capítulo é ver como o Teorema Fundamental do Cálculo se comporta com relação à integral de Lebesgue. Em que condições temos que dada uma função f derivável quase sempre em $[a, b]$ temos que

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,?$$

E quando, para uma uma função f integrável em $[a, b]$, tem-se

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,?$$

Por exemplo, se $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ então

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}0 = f(x) \text{ para quase todo } x \in [0, 1],$$

embora f seja descontínua em todos os pontos.

4.1 Derivação de funções monótonas

Definição 4.1 *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ e $\mathscr{I}$ uma coleção de intervalos não degenerados. Dizemos que $\mathscr{I}$ cobre E no sentido de Vitali se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in E$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \varepsilon$.*

Exemplo 4.2 *Seja $E \subset \mathbb{R}$. A coleção*

$$\mathscr{I} = \{(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}); x \in E, m \in \mathbb{N}\}$$

cobre o conjunto E no sentido de Vitali.

Lema 4.3 (Vitali) *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ com medida exterior finita e $\mathscr{I}$ uma coleção de intervalos que cobre E no sentido de Vitali. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma subcoleção finita de intervalos dois a dois disjuntos de $\mathscr{I}$, $\{I_1, \ldots, I_N\}$, satisfazendo*

$$m^*(E \setminus \cup_{n=1}^N I_n) < \varepsilon.$$

Além do mais, se $m^*(E) > 0$ então também temos

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) < (1 + \varepsilon) m^*(E). \tag{4.4}$$

Demonstração: Podemos supor que os intervalos de $\mathscr{I}$ são fechados pois, a coleção

$$\overline{\mathscr{I}} = \{\overline{I}; I \in \mathscr{I}\}$$

também cobre E no sentido de Vitali, $\ell(\overline{I}) = \ell(I)$ e

$$m^*(E \setminus \cup_{n=1}^N I_n) \leq m^*((E \setminus \cup_{n=1}^N \overline{I_n}) \cup \{\text{extremos finitos de } I_1, \ldots, I_N\})$$

$$\leq m^*(E \setminus \cup_{n=1}^N \overline{I_n}) + m^*(\{\text{extremos finitos de } I_1, \ldots, I_N\}) = m^*(E \setminus \cup_{n=1}^N \overline{I_n}).$$

Se $m^*(E) = 0$ então tomando qualquer $I_1 \in \mathscr{I}$ temos $m^*(E \setminus I_1) \leq m^*(E) = 0 < \varepsilon$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

Suponha agora que $m^*(E) > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe aberto $\mathscr{O} \supset E$ tal que

$$m(\mathscr{O}) < m^*(E) + \varepsilon m^*(E) = (1+\varepsilon)m^*(E). \tag{4.5}$$

Note que $m(\mathscr{O}) < \infty$.

Vejamos agora que a subcoleção de $\mathscr{I}$ dada por

$$\mathscr{J} = \{I \in \mathscr{I}; I \subset \mathscr{O}\}$$

ainda cobre E no sentido de Vitali.

Sejam $x \in E \subset \mathscr{O}$ e $\eta > 0$. Como $\mathscr{O}$ é aberto, existe $\delta \in (0, \eta)$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset \mathscr{O}$. Como $\mathscr{I}$ cobre E no sentido de Vitali, existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \delta/2$. Note que $I \subset (x-\delta, x+\delta) \subset \mathscr{O}$. De fato, como $x \in I$, dado $y \in I$, $|y - x| \leq \delta/2 < \delta < \eta$.

Desta forma, podemos supor que $\mathscr{I} = \mathscr{J}$, ou seja, que os intervalos de $\mathscr{I}$ estão todos contidos em $\mathscr{O}$.

Note que no caso em que $m^*(E) > 0$, se $I_1, \ldots, I_N \in \mathscr{I}$ são dois a dois disjuntos então a condição (4.4) fica satisfeita pois

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) = m(\cup_{n=1}^{N} I_n) \leq m(\mathscr{O}) < (1+\varepsilon)m^*(E)$$

por (4.5).

Fixe $I_1 \in \mathscr{I}$. Se $E \subset I_1$ então $E \setminus I_1 = \varnothing$ e podemos tomar $N = 1$.

Suponha agora que $E \not\subset I_1$. Dessa forma, o conjunto

$$L_1 = \{\ell(I); I \in \mathscr{I} \text{ e } I \cap I_1 = \varnothing\}$$

é não vazio. De fato, tome $x \in E \setminus I_1$, como o complementar de I_1 é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset I_1^{\mathrm{c}}$. Como $\mathscr{I}$ cobre E no sentido de Vitali, existe $I \in \mathscr{I}$ contendo x com $\ell(I) < \delta/2$. Logo,

$$I \subset (x-\delta, x+\delta) \subset I_1^{\mathrm{c}}$$

e, portanto, $I \cap I_1 = \varnothing$. Além do mais, como todo intervalo de $\mathscr{I}$ está contido em $\mathscr{O}$ vemos que $m(\mathscr{O})$ é um limitante superior de L_1.

Seja $s_1 = \sup L_1$. Como os intervalos de $\mathscr{I}$ são todos não degenerados, $s_1 > 0$. Assim, $0 < s_1 \leq m(\mathscr{O})$. Portanto, existe $I' \in \mathscr{I}$ tal que $I' \cap I_1 = \varnothing$ e $\ell(I') > s_1/2$. Defina $I_2 = I'$. Logo, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ e $\ell(I_2) > s_1/2$, $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$.

Se $E \subset \cup_{j=1}^{2} I_j$, tomamos $N = 2$. Caso isto não aconteça repetimos o processo. Suponha assim, que tenhamos obtido intervalos $I_1, \ldots, I_n \in \mathscr{I}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, de modo que $I_i \cap I_j = \varnothing$ se $i \neq j$ e $\ell(I_{j+1}) > s_j/2$, $j = 1, \ldots, n-1$, em que $s_j = \sup L_j$ com

$$L_j = \{\ell(I); I \in \mathscr{I} \text{ e } I \cap I_i = \varnothing, i = 1, \ldots, j\}.$$

Se $E \subset \cup_{j=1}^{n} I_j$ o processo termina e o teorema está demonstrado com $N = n$. Caso isto não aconteça, vamos escolher I_{n+1} procedendo de modo análogo ao que foi feito para escolher I_2 a partir de I_1. Vejamos.

Suponha assim que $E \not\subset \cup_{j=1}^{n} I_j$. Dessa forma, o conjunto

$$L_n = \{\ell(I); I \in \mathscr{I} \text{ e } I \cap I_j = \varnothing, j = 1, \ldots, n\}$$

é não vazio. De fato, tome $x \in E \setminus \cup_{j=1}^{n} I_j$, como o complementar de $\cup_{j=1}^{n} I_j$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset [\cup_{j=1}^{n} I_j]^{\mathrm{c}}$. Como $\mathscr{I}$ cobre E no sentido de Vitali, existe $I \in \mathscr{I}$ contendo x com $\ell(I) < \delta/2$. Logo,

$$I \subset (x-\delta, x+\delta) \subset [\cup_{j=1}^{n} I_j]^{\mathrm{c}}$$

e, portanto, $I \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, \ldots, n$. Além do mais, como todo intervalo de $\mathscr{I}$ está contido em $\mathscr{O}$ vemos que $m(\mathscr{O})$ é um limitante superior de L_n.

Seja $s_n = \sup L_n$. Como os intervalos de $\mathscr{I}$ são todos não degenerados, $s_n > 0$. Assim, $0 < s_n \leq m(\mathscr{O})$. Portanto, existe $I' \in \mathscr{I}$ tal que $I' \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, \ldots, n$ e $\ell(I') > s_n/2$. Defina $I_{n+1} = I'$.

Se $E \subset \cup_{j=1}^{n+1} I_j$, tomamos $N = n+1$ e, caso contrário, repetimos o processo. Se em algum momento, isto é, para algum $N \in \mathbb{N}$ tivermos $E \subset \cup_{j=1}^{N} I_j$ o processo termina e o teorema está demonstrado. Caso isto não aconteça, obtemos uma sequência I_n de intervalos de $\mathscr{I}$ dois a dois disjuntos que é tal que $E \not\subset \cup_{n=1}^{N} I_n$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e $\ell(I_{n+1}) > s_n/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ são dois a dois disjuntos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = m(\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \leq m(\mathscr{O}) < \infty. \tag{4.6}$$

Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Coloque $R = E \setminus (\cup_{n=1}^{N} I_n)$. Se $x \in R$, como $[\cup_{n=1}^{N} I_n]^{\mathrm{c}}$ é aberto, existe $I_o \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I_0$ e $I_0 \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, \ldots, N$.

Note que se $I_0 \cap I_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$ então $\ell(I_0) \in L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$0 < \ell(I_0) \leq s_n < 2\ell(I_{n+1}).$$

Dessa forma, como $\lim_{n\to\infty} \ell(I_{n+1}) = 0$, não podemos ter $I_0 \cap I_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_0 \cap I_n \neq \varnothing$. Note que $n > N$ já que $I_0 \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, \ldots, N$.

Seja

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}; I_0 \cap I_n \neq \varnothing\} > N.$$

Como $I_0 \cap I_j = \varnothing$ se $j = 1, \ldots, n_0 - 1$, analisando como acima, obtemos

$$\ell(I_0) \leq s_{n_0-1} < 2\ell(I_{n_0}).$$

Mostremos que I_0 está contido em um intervalo concêntrico a I_{n_0} de raio cinco vezes o raio de I_{n_0}. Seja x_{n_0} o centro de I_{n_0}. Tome $z \in I_0 \cap I_{n_0}$. Se $y \in I_0$ então

$$|y - x_{n_0}| \leq |y - z| + |z - x_{n_0}| \leq \ell(I_0) + \frac{1}{2}\ell(I_{n_0}) < 2\ell(I_{n_0}) + \frac{1}{2}\ell(I_{n_0}) = \frac{5}{2}\ell(I_{n_0}).$$

Para $n \geq N + 1$ defina

$$J_n = (x_n - \frac{5}{2}\ell(I_n), x_n + \frac{5}{2}\ell(I_n)),$$

sendo x_n o centro do intervalo I_n, ou seja, J_n é o intervalo aberto concêntrico a I_n de raio cinco vezes o raio de I_n. Com esta notação, acabamos de mostrar que

$$R \subset \cup_{n=N+1}^{\infty} J_n.$$

Segue que

$$m^*(E \setminus \cup_{n=1}^N I_n) = m^*(R) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon.$$

□

Segue da demonstração do Lema de Vitali o seguinte

Corolário 4.7 *Sejam E e $\mathscr{I}$ como no Lema de Vitali. Então existe uma sequência $I_1, I_2, \cdots \in \mathscr{I}$, finita ou não, de intervalos dois a dois disjuntos satisfazendo*

$$m^*(E) \leq 5 \sum_{n \geq 1} \ell(I_n).$$

Demonstração: Mantendo a notação utilizada na demonstração, temos que no caso em que $E \subset \cup_{j=1}^n I_j$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então

$$m^*(E) \leq \sum_{j=1}^n \ell(I_j) < 5 \sum_{j=1}^n \ell(I_j)$$

e no outro caso,

$$m^*(E) \leq m^*((E \setminus \cup_{n=1}^N I_n) \cup (\cup_{n=1}^N I_n)) \leq m^*(E \setminus \cup_{n=1}^N I_n) + m^*(\cup_{n=1}^N I_n)$$

$$\leq 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) \leq 5 \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

□

Nosso primeiro resultado nesta seção será para funções crescentes definidas em $[a, b]$. Note que se f é uma tal função então f é limitada pois $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in [a, b]$. Além do mais, f é mensurável pois se $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$E_\alpha \doteq \{x \in [a, b]; f(x) > \alpha\}$$

é um intervalo (ou vazio) pois se $x_0 \in E_\alpha$ então para todo $x \in (x_0, b]$ temos $f(x) \geq f(x_0) > \alpha$, ou seja, $x \in E_\alpha$.

Como toda função mensurável e limitada definida em conjunto de medida finita é integrável neste conjunto ($|f| \leq K$ em E com $m(E) < \infty$ então $\int_E |f| \leq Km(E) < \infty$) segue que toda função crescente em $[a,b]$ pertence a $\mathscr{L}^1([a,b])$. O mesmo raciocínio se aplica para funções decrescentes.

Lembremos as definições de limite superior e inferior, ambos à direita e à esquerda, de uma função g definida em algum intervalo aberto I definimos para $x \in I$

$$\limsup_{y \to x+} g(y) = \lim_{t \to 0+} \left[\sup_{x<y<x+t} g(y) \right] = \inf_{t>0} \left[\sup_{x<y<x+t} g(y) \right]$$

$$(0 < t \mapsto \sup_{x<y<x+t} g(y) \quad \text{é crescente})$$

$$\liminf_{y \to x+} g(y) = \lim_{t \to 0+} \left[\inf_{x<y<x+t} g(y) \right] = \sup_{t>0} \left[\inf_{x<y<x+t} g(y) \right]$$

$$(0 < t \mapsto \inf_{x<y<x+t} g(y) \quad \text{é decrescente})$$

$$\limsup_{y \to x-} g(y) = \lim_{t \to 0-} \left[\sup_{x+t<y<x} g(y) \right] = \inf_{t<0} \left[\sup_{x+t<y<x} g(y) \right]$$

$$(0 > t \mapsto \sup_{x+t<y<x} g(y) \quad \text{é decrescente})$$

$$\liminf_{y \to x-} g(y) = \lim_{t \to 0-} \left[\inf_{x+t<y<x} g(y) \right] = \sup_{t<0} \left[\inf_{x+t<y<x} g(y) \right]$$

$$(0 > t \mapsto \inf_{x+t<y<x} g(y) \quad \text{é crescente})$$

Dada uma função f a valores reais definida em algum intervalo aberto I definimos para $x \in I$

$$D_1 f(x) = \limsup_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \inf_{t>0}\left[\sup_{0<h<t} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$D_2 f(x) = \liminf_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sup_{t>0}\left[\inf_{0<h<t} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$D_3 f(x) = \limsup_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \inf_{t<0}\left[\sup_{t<h<0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$D_4 f(x) = \liminf_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sup_{t<0}\left[\inf_{t<h<0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

Temos

- Sempre valem $D_1 f \geq D_2 f$ e $D_3 f \geq D_4 f$.
- Existe a derivada lateral à direita de f em x se e somente $D_1 f(x) = D_2 f(x) \in \mathbb{R}$.
- Existe a derivada lateral à esquerda de f em x se e somente $D_3 f(x) = D_4 f(x) \in \mathbb{R}$.
- Existe
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}$$
se e somente se $D_1 f(x) = D_2 f(x) = D_3 f(x) = D_4 f(x)$.
- Existe a derivada de f em x se e somente $D_1 f(x) = D_2 f(x) = D_3 f(x) = D_4 f(x) \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.8 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então f é derivável quase sempre, sua derivada f' é mensurável, $f' \geq 0$ q. s. e*

$$0 \leq \int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b-) - f(a+),$$

com $f(a+) = \lim_{x\to a+} f(x)$ e $f(b-) = \lim_{x\to b-} f(x)$.

Em particular, $f' \in \mathscr{L}^1([a,b])$.

Demonstração: Vejamos primeiramente que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}$$

existe quase sempre.

Como para $x \in (a,b)$ o limite acima existe se e somente $D_1 f(x) = D_2 f(x) = D_3 f(x) = D_4 f(x)$, temos

$$\{x \in (a,b);\ \text{não existe } \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}\} =$$

$$\begin{aligned} = \{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_2 f(x)\} \cup \{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_4 f(x)\} \\ \cup \{x \in (a,b); D_2 f(x) > D_4 f(x)\} \\ \cup \{x \in (a,b); D_3 f(x) > D_2 f(x)\} \cup \{x \in (a,b); D_3 f(x) > D_4 f(x)\} \\ \cup \{x \in (a,b); D_4 f(x) > D_2 f(x)\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Note que, por exemplo, não precisamos incluir o conjunto

$$\{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_3 f(x)\}$$

na igualdade acima pois, se

$$x \in \{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_3 f(x)\}$$

então

$$D_1 f(x) > D_3 f(x) \geq D_4 f(x),$$

isto é, $x \in \{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_4 f(x)\}$, que é um dos conjuntos que compõem a reunião em(4.9).

Mostremos que $m^*(\{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_4 f(x)\}) = 0$. Os outros casos são semelhantes.

Como

$$\begin{aligned} E_{14} &\doteq \{x \in (a,b); D_1 f(x) > D_4 f(x)\} \\ &= \cup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q} \\ r>s}} \{x \in (a,b); D_1 f(x) > r > s > D_4 f(x)\} \end{aligned}$$

basta mostrar que $m^*(A_{r,s}) = 0$ sendo

$$A_{r,s} \doteq A \doteq \{x \in (a,b); D_1 f(x) > r > s > D_4 f(x)\}.$$

Suponha que $m^*(A) > 0$. Seja $x \in A$. Como

$$D_4 f(x) = \liminf_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sup_{t<0} \left[\inf_{t<h<0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] < s$$

segue que para todo $t < 0$ temos

$$\inf_{t<h<0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < s,$$

isto é,

$$\inf_{t<h<0} \frac{f(x) - f(x+h)}{-h} < s.$$

Colocando $\tau = -h$ temos para todo $t < 0$

$$\inf_{0<\tau<-t} \frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau} < s.$$

Assim, para cada $t < 0$ existe $\tau = \tau(x,t) \in (0, -t)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau} < s,$$

isto é,

$$f(x) - f(x-\tau) < s\tau. \tag{4.10}$$

Como $t < 0$ é arbitrário e $0 < \tau < -t$, vemos que para cada $x \in A$ existe uma infinidade de números positivos τ que podem ser tomados arbitrariamente pequenos e que satisfazem (4.10).

Seja
$$\mathscr{H}(x) = \{\tau; \tau > 0 \text{ e } f(x) - f(x - \tau) < s\tau\}.$$
Dessa forma, a coleção de intervalos
$$\mathscr{I} = \{[x - \tau, x]; x \in A, \tau \in \mathscr{H}(x)\}$$
cobre o conjunto A no sentido de Vitali. Dessa forma, pelo Lema 4.3, dado $\varepsilon > 0$ existe um número finito de intervalos dois a dois disjuntos $I_j \doteq [x_j - \tau_j, x_j] \in \mathscr{I}$, $j = 1, \dots, N$ satisfazendo

(i) $f(x_j) - f(x_j - \tau_j) < s\tau_j$.

(ii) $m^*(A) - \varepsilon < m^*(A \cap \cup_{j=1}^N I_j)$ pois
$$m^*(A) = m^*((A \cap \cup_{j=1}^N I_j) \cup (A \setminus \cup_{j=1}^N I_j))$$
$$\leq m^*(A \cap \cup_{j=1}^N I_j) + m^*(A \setminus \cup_{j=1}^N I_j) < m^*(A \cap \cup_{j=1}^N I_j) + \varepsilon.$$

(iii) $\sum_{j=1}^N \tau_j = \sum_{j=1}^N \ell(I_j) < (1 + \varepsilon) m^*(A)$ pois $m^*(A) > 0$.

Combinando (i) e (iii) temos

(iv) $\sum_{j=1}^N [f(x_j) - f(x_j - \tau_j)] < s(1 + \varepsilon) m^*(A)$

Sejam $B = A \cap \cup_{j=1}^N I_j$ e $B_0 = A \cap \cup_{j=1}^N \mathring{I}_j$. Claramente $B_0 \subset B$ e $B = B_0 \cup \{z_1, \dots, z_k\}$ com $\{z_1, \dots, z_k\} \subset \{x_j - \tau_j, x_j; j = 1, \dots, N\}$. Temos $m^*(B_0) \leq m^*(B)$ e
$$m^*(B) \leq m^*(B_0) + m^*(\{z_1\}) + \dots + m^*(\{z_k\}) = m^*(B_0),$$
isto é, $m^*(B_0) = m^*(B)$.

Seja $y \in B_0$. Existe (um único) $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que
$$y \in \mathring{I}_j = (x_j - \tau_j, x_j).$$

Como $y \in A$,

$$D_1 f(y) = \inf_{t>0} \sup_{0<h<t} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} > r,$$

segue que para todo $t > 0$ temos

$$\sup_{0<h<t} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} > r.$$

Assim, para cada $t > 0$ existe $\sigma = \sigma(y,t) \in (0, \min\{t, x_j - y\})$ tal que

$$\frac{f(y+\sigma) - f(y)}{\sigma} > r.$$

Assim

$$f(y+\sigma) - f(y) > r\sigma \quad \text{e} \quad [y, y+\sigma] \subset I_j = [x_j - \tau_j, x_j]. \tag{4.11}$$

Como $t > 0$ é arbitrário e $0 < \sigma < t$, vemos que para cada $y \in A$ existem um único $j \in \{1, \ldots, N\}$ e uma infinidade de números positivos σ que podem ser tomados arbitrariamente pequenos e que satisfazem (4.11).

Seja $\mathscr{K}(y)$ o conjunto dos $\sigma > 0$ que satisfazem (4.11).

Como a coleção

$$\mathscr{J} = \{[y, y+\sigma]; y \in B_0, \sigma \in \mathscr{K}(y)\}$$

forma uma cobertura de B_0 no sentido de Vitali, segue do Lema 4.3 que existem intervalos dois a dois disjuntos

$$J_i = [y_i, y_i + \sigma_i] \in \mathscr{J}, \quad i = 1, \ldots, M,$$

satisfazendo

(v) cada $J_i = [y_i, y_i + \sigma_i]$ está contido em algum $I_j = [x_j - \tau_j, x_j]$, $j = 1, \ldots, N$.

(vi) $f(y_i + \sigma_i) - f(y_i) > r\sigma_i$.

(vii) $m^*(B) - \varepsilon = m^*(B_0) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{M} \sigma_i$, pois

$$m^*(B_0) = m^*((B_0 \cap \cup_{i=1}^{M} J_i) \cup (B_0 \setminus \cup_{i=1}^{M} J_i))$$

$$\leq m^*(B_0 \cap \cup_{i=1}^{M} J_i) + m^*(B_0 \setminus \cup_{i=1}^{M} J_i) < \sum_{i=1}^{M} \ell(J_i) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i + \varepsilon.$$

Logo, por (ii) temos

$$m^*(A) - 2\varepsilon < m^*(A \cap \cup_{j=1}^{N} I_j) - \varepsilon = m^*(B) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{M} \sigma_i.$$

Combinando (vi) e (vii) temos

(viii) $\sum_{i=1}^{M} [f(y_i + \sigma_i) - f(y_i)] > r(m^*(A) - 2\varepsilon)$

Veja que se $\alpha < p_1 < \cdots < p_{2n} < \beta$, $n \geq 1$, são pontos de $[a, b]$, como f é crescente temos

$$\sum_{k=1}^{n} [f(p_{2k}) - f(p_{2k-1})] =$$

$$= [f(p_2) - f(p_1)] + [f(p_4) - f(p_3)] + \cdots + [f(p_{2n}) - f(p_{2n-1})]$$

$$= -f(p_1) + [f(p_2) - f(p_3)] + \cdots + [f(p_{2n-2}) - f(p_{2n-1})] + f(p_{2n}) \leq$$

$$\leq f(p_{2n}) - f(p_1) \leq f(\beta) - f(\alpha).$$

Assim, por (v) obtemos

$$\sum_{i=1}^{M} [f(y_i + \sigma_i) - f(y_i)] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i \in \{1,\ldots,M\} \\ J_i \subset I_j}} [f(y_i + \sigma_i) - f(y_i)]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} [f(x_j) - f(x_j - \tau_j)].$$

Assim, de (iv) e (viii) vem que

$$r(m^*(A) - 2\varepsilon) < \sum_{i=1}^{M} [f(y_i + \sigma_i) - f(y_i)]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} [f(x_j) - f(x_j - \tau_j)] < s(1 + \varepsilon)m^*(A),$$

isto é,

$$r(m^*(A) - 2\varepsilon) < s(1 + \varepsilon)m^*(A) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0+$ obtemos $rm^*(A) \leq sm^*(A)$. Mas como $m^*(A) > 0$, devemos ter $r \leq s$, o que é uma contradição. Portanto, $m^*(A) = 0$ e

$$g(x) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}$$

está definida quase sempre e f é derivável quando $g(x) \in \mathbb{R}$.

Estenda f para $x > b$ colocando $f(x) = f(b-) \leq f(b) < +\infty$.

Para para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $x \in (a, b)$ defina

$$g_k(x) = \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}} = k(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)).$$

Temos que g_k é mensurável, $g_k \to g$ quase sempre e, como f é crescente, $g_k \geq 0$. Portanto, $g \geq 0$ quase sempre.

Pelo Lema de Fatou e pelo Exercício Resolvido 3.46

$$0 \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_a^b g_k(x)\,dx = \liminf_{k \to \infty} k \int_a^b [f(x + 1/k) - f(x)]\,dx$$

$$= \liminf_{k \to \infty} k \left[\int_a^b f(x + 1/k)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right]$$

$$= \liminf_{k \to \infty} k \left[\int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{k\to\infty} k \left[\int_{a+1/k}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{b+1/k} f(x)\,dx \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_{a}^{a+1/k} f(x)\,dx - \int_{a+1/k}^{b} f(x)\,dx \right] \\
&= \liminf_{k\to\infty} k \left[\int_{b}^{b+1/k} f(x)\,dx - \int_{a}^{a+1/k} f(x)\,dx \right] \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left[f(b-) - k \int_{a}^{a+1/k} f(x)\,dx \right] \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[f(b-) - k \int_{a}^{a+1/k} f(a+)\,dx \right] \\
&= \liminf_{k\to\infty} [f(b-) - f(a+)] = f(b-) - f(a+) < +\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, g é integrável em $[a,b]$ e pela Proposição 3.24, g é finita quase sempre, ou seja, f é diferenciável quase sempre e $f' = g \geq 0$ quase sempre.

□

Observação 4.12 *A função de Cantor, conforme definida em lista de exercício, é crescente, contínua em $[0,1]$ e constante em cada intervalo aberto que foi retirado na construção do conjunto de Cantor. Assim, sua derivada é zero em cada um destes intervalos. Dessa forma, sua derivada existe quase sempre e é igual a zero quase sempre. No entanto,*

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 < 1 = f(1) - f(0).$$

4.2 Funções de variação limitada

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\mathscr{P} : a = x_0 < \cdots < x_m = b$ uma partição de $[a,b]$. Defina

$$p \doteq p(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

e

$$n \doteq n(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^{-}.$$

Temos

$$t \doteq t(f, \mathscr{P}) \doteq p + n = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

e

$$\begin{aligned} p - n &= \sum_{i=1}^{m} \left[[f(x_i) - f(x_{i-1})]^{+} - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^{-} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Quando se fizer necessário para maior clareza também usaremos a notação $t_a^b(f, \mathscr{P})$ no lugar de t e de modo análogo para n e p.

Defina também

$$P \doteq P_a^b(f) \doteq \sup\{p(f, \mathscr{P}); \mathscr{P} \text{ é partição de } [a,b]\},$$

$$N \doteq N_a^b(f) \doteq \sup\{n(f, \mathscr{P}); \mathscr{P} \text{ é partição de } [a,b]\}$$

e

$$T \doteq T_a^b(f) \doteq \sup\{t(f, \mathscr{P}); \mathscr{P} \text{ é partição de } [a,b]\}.$$

Os supremos acima podem ser infinitos.

Temos $P \leq T \leq P + N$ e $N \leq T$.

$P_a^b(f)$, $N_a^b(f)$ e $T_a^b(f)$ são chamadas de variações positiva, negativa e total de f em $[a, b]$, respectivamente.

Definição 4.13 *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada em $[a, b]$ se $T_a^b(f)$ for finito. Defina*

$$\mathit{BV}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \text{ é de variação limitada em } [a,b]\}.$$

Lema 4.14 *Se $f \in BV([a,b])$ então*

$$T_a^b(f) = N_a^b(f) + P_a^b(f) \quad e \quad f(b) - f(a) = P_a^b(f) - N_a^b(f).$$

Demonstração: Seja $\mathscr{P}$ uma partição de $[a,b]$. Temos,

$$p = n + f(b) - f(a) \leq N_a^b(f) + f(b) - f(a)$$

e, portanto,

$$P_a^b(f) \leq N_a^b(f) + f(b) - f(a).$$

Como $N_a^b(f) \leq T_a^b(f) < \infty$, obtemos

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) \leq f(b) - f(a). \tag{4.15}$$

Por outro lado

$$n = p + f(a) - f(b) \leq P_a^b(f) + f(a) - f(b)$$

e, portanto,

$$N_a^b(f) \leq P_a^b(f) + f(a) - f(b).$$

Como $P_a^b(f) \leq T_a^b(f) < \infty$, obtemos

$$N_a^b(f) - P_a^b(f) \leq f(a) - f(b),$$

ou seja,

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) \geq f(b) - f(a). \tag{4.16}$$

Por (4.15) e (4.16) chegamos a

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

Agora,

$$T_a^b(f) \geq p + n = p + p + f(a) - f(b) = 2p + N_a^b(f) - P_a^b(f),$$

portanto,

$$T_a^b(f) \geq 2P_a^b(f) + N_a^b(f) - P_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f).$$

Mas, como vale

$$T_a^b(f) \leq P_a^b(f) + N_a^b(f)$$

obtemos

$$T_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f).$$

$\square$

Proposição 4.17 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

(i) Se $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ então $T_\alpha^\beta(f) \leq T_a^b(f)$.

(ii) Se $a < c < b$ então $T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f)$.

Demonstração: *(i)* Dada uma partição $\mathscr{P} : \alpha = x_0 < \cdots < x_m = \beta$ de $[\alpha, \beta]$, seja $\mathscr{P}'$ a partição de $[a, b]$ obtida de $\mathscr{P}$ adicionando-se os pontos a e b, caso necessário, isto é, dependendo se α for ou não igual a a e β for ou não igual a b.

Temos

$$t_\alpha^\beta(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\leq |f(x_0) - f(a)| + \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_m)|$$

$$= t_a^b(f, \mathscr{P}') \leq T_a^b(f)$$

e, portanto,

$$T_\alpha^\beta(f) \leq T_a^b(f).$$

(ii) Sejam $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ partições de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. A reunião dos pontos destas partições resulta numa partição $\mathscr{P}$ de $[a, b]$ e vale

$$t_a^c(f, \mathscr{P}_1) + t_c^b(f, \mathscr{P}_2) = t_a^b(f, \mathscr{P}) \leq T_a^b(f).$$

Segue que

$$T_a^c(f) + T_c^b(f) \leq T_a^b(f).$$

Agora, se $\mathscr{P}$ é uma partição qualquer de $[a, b]$ forme a partição $\mathscr{P}'$ colocando o ponto c à partição $\mathscr{P}$, caso ele ainda não seja um elemento seu. Os pontos da partição $\mathscr{P}'$ dão origem a duas partições $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ de $[a, c]$ e de $[c, b]$, respectivamente, de modo que $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 = \mathscr{P}'$ e $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{c\}$.

Note que se $c \in [x_{i-1}, x_i]$, com $x_{i-1}, x_i \in \mathscr{P}$ então $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(c) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(c)|$ e, portanto,

$$t_a^b(f, \mathscr{P}) \leq t_a^b(f, \mathscr{P}') = t_a^c(f, \mathscr{P}_1) + t_c^b(f, \mathscr{P}_2) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f).$$

Logo,

$$T_a^b(f) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f)$$

e, portanto,

$$T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f).$$

□

Proposição 4.18 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é crescente então $f \in$ BV$([a, b])$.*

Demonstração: Seja $\mathscr{P} : a = x_0 < \cdots < x_m = b$ uma partição de $[a, b]$. Temos

$$p(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(b) - f(a),$$

$$n(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- = \sum_{i=1}^{m} 0 = 0$$

e, portanto, $P_a^b(f) = f(b) - f(a)$, $N_a^b(f) = 0$ e $T_a^b(f) = f(b) - f(a)$.

□

Teorema 4.19 *$f \in$ BV$([a, b])$ se e somente se existem funções crescentes $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $f = g - h$.*

Demonstração: Suponha que $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

Para $x \in (a,b]$ defina $g(x) = P_a^x(f)$ e $h(x) = N_a^x(f)$. Em $x = a$ coloque $g(a) = h(a) = 0$. Claramente, $g(a) \leq g(x)$ e $h(a) \leq h(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Sejam $a < x < y \leq b$. Seja $\mathscr{P} : a = x_0 < \cdots < x_m = x$ uma partição de $[a,x]$. Colocando $x_{m+1} = y$, $\mathscr{P}' : a = x_0 < \cdots < x_m < x_{m+1} = y$ é uma partição de $[a,y]$. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{m}[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ \leq \sum_{i=1}^{m+1}[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ \leq P_a^y(f) = g(y).$$

Como $\mathscr{P}$ é arbitrária, temos

$$g(x) = P_a^x(f) = \sup\{p(f,\mathscr{P}); \mathscr{P} \text{ é partição de } [a,x]\} \leq P_a^y(f) = g(y).$$

Portanto, $g(x) \leq g(y)$, isto é, g é crescente em $[a,b]$.

De forma análoga mostra-se que h é crescente em $x \in [a,b]$.

Pelo Lema 4.14

$$f(x) = g(x) - h(x) + f(a) = g(x) - (h(x) - f(a)) = g(x) - \widetilde{h}(x),$$

sendo $\widetilde{h}(x) = h(x) - f(a)$, que também é crescente.

Reciprocamente, suponha que $f = g - h$ com g e h funções crescentes em $[a,b]$.

Seja $\mathscr{P} : a = x_0 < \cdots < x_m = b$ uma partição de $[a,b]$.

Temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}|f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{m}|g(x_i) - h(x_i) - g(x_{i-1}) + h(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}[|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |h(x_i) - h(x_{i-1})|] \\ &= \sum_{i=1}^{m}[g(x_i) - g(x_{i-1}) + h(x_i) - h(x_{i-1})]\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{m}[h(x_i) - h(x_{i-1})] = g(b) - g(a) + h(b) - h(a).$$

Portanto,

$$T_a^b(f) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty.$$

$\square$

Corolário 4.20 *BV*$([a,b]) \subset \mathscr{L}^1([a,b])$

Demonstração: Pelo Teorema 4.19 existem funções crescentes g e h definidas em $[a,b]$ tais que $f = g - h$. Pelos comentários sobre funções crescentes na página 114, as funções g e h são integráveis em $[a,b]$.

$\square$

Corolário 4.21 *Toda $f \in$ BV$([a,b])$ é derivável quase sempre e $f' \in \mathscr{L}^1([a,b])$.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.19 existem funções crescentes g e h definidas em $[a,b]$ tais que $f = g - h$. Pelo Teorema 4.8 as funções g e h são deriváveis quase sempre e integráveis em $\mathscr{L}^1([a,b])$. Portanto, f é derivável quase sempre e integrável em $\mathscr{L}^1([a,b])$.

$\square$

Corolário 4.22 *BV$([a,b])$ é um espaço vetorial.*

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{BV}([a,b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 4.19 existem funções crescentes, $g_1, g_2, h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f_1 = g_1 - h_1$ e $f_2 = g_2 - h_2$.

Assim,

$$f_1 + f_2 = g_1 - h_1 + g_2 - h_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2) = G - H,$$

com $G = g_1 + g_2$ e $H = h_1 + h_2$ crescentes. Pelo mesmo teorema,

$$f_1 + f_2 \in \mathrm{BV}([a,b]).$$

Se $\lambda \geq 0$ então λg_1 e λh_1 são crescentes.

Como $\lambda f_1 = (\lambda g_1) - (\lambda h_1)$, segue do teorema acima que $\lambda f \in \mathrm{BV}([a,b])$.
Se $\lambda < 0$ então $-\lambda g_1$ e $-\lambda h_1$ são crescentes.
Como

$$\lambda f_1 = \lambda g_1 - \lambda h_1 = (-\lambda h_1) - (-\lambda g_1)$$

segue do teorema acima que $\lambda f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

□

4.3 Derivação de uma integral

Recordemos a definição de função absolutamente contínua dada no capítulo anterior: Seja I um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $[a_n, b_n] \subset I$ e $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, são intervalos abertos dois a dois disjuntos satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \delta$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

Temos

Teorema 4.23 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua então f é de variação limitada.*

Demonstração: Como f é absolutamente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < 1$$

sempre que $[a_i, b_i] \subset [a,b]$, (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, n$, dois a dois disjuntos, satisfazendo $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$.

Fixe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > (b-a)/\delta$ e tome a partição $a = x_0 < \cdots < x_N = b$ com $x_i - x_{i-1} = (b-a)/N < \delta$, $i = 1, \ldots, N$, isto é, $x_i = a + i(b-a)/N$, $i = 0, \ldots, N$.

Como qualquer partição $x_{i-1} = y_0 < \cdots < y_m = x_i$ de $[x_{i-1}, x_i]$ satisfaz $\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_{j-1}) = x_i - x_{i-1} < \delta$, segue que $T_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq 1$. Utilizando a Proposição 4.17 obtemos

$$T_a^b(f) = \sum_{i=1}^{N} T_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq \sum_{i=1}^{N} 1 = N.$$

Portanto, $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

□

Teorema 4.24 *Seja $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$. Dado $c \in \mathbb{R}$ defina*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b] \quad (F(a) = c).$$

Então F é absolutamente contínua.

Demonstração: Utilize o Corolário 3.44 com a função $\widetilde{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ que é igual a f em $[a,b]$ e igual a 0 em $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ vemos que

$$G(x) = \int_a^x \widetilde{f}(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

é absolutamente contínua. □

Corolário 4.25 *Seja $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$. Dado $c \in \mathbb{R}$ defina*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b] \quad (F(a) = c).$$

Então $F \in BV([a,b])$.

Demonstração: F é absolutamente contínua pelo Teorema 4.24. O resultado segue imediatamente do Teorema 4.23.

□

Teorema 4.26 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua e $f' = 0$ quase sempre em $[a,b]$ então f é constante.*

Demonstração: Sejam $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Seja $E = \{t \in (x,y); f'(t) = 0\}$. Como $f' = 0$ quase sempre em $[a,b]$ segue que $m((x,y) \setminus E) = 0$, ou seja, $m(E) = y - x > 0$.

Dados $\varepsilon > 0$ e $\xi \in E$, como $f'(\xi) = 0$ existe $h_0 = h_0(\varepsilon, \xi) > 0$ tal que para todo $h \in (0, h_0)$ temos

$$|f(\xi + h) - f(\xi)| < \varepsilon h.$$

A coleção de intervalos

$$\mathscr{I} = \{[\xi, \xi + h]; \xi \in E, h \in (0, h_0(\varepsilon, \xi))\}$$

cobre E no sentido de Vitali. Note que como $E \subset (x,y)$ para todo $\xi \in E$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $\xi \in I \subset (x,y)$. Dessa forma, descartando os intervalos de $\mathscr{I}$ que não estão contidos em (x,y), obtemos um subconjunto de $\mathscr{I}$ que ainda cobre E no sentido de Vitali. Assim, podemos assumir que todos os intervalos de $\mathscr{I}$ estão contidos em (x,y)

Como f é absolutamente contínua existe $\delta > 0$ tal que se $[a_n, b_n] \subset [a,b]$ e $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, são intervalos abertos dois a dois disjuntos satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \delta$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

Podemos supor que $0 < \delta < y - x$.

Como $0 < m(E) = y - x < \infty$, segue do Lema 4.3 que existem intervalos dois a dois disjuntos $I_j = [\xi_j, \xi_j + h_j] \in \mathscr{I}$, que podemos assumir que estão enumerados de forma que $\xi_1 < \cdots < \xi_N$, satisfazendo $I_j \subset (x,y)$, $j = 1, \ldots, N$ e

i) $|f(\xi_j + h_j) - f(\xi_j)| < \varepsilon h_j$, $j = 1, \ldots, N$.

ii) $m(E \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j) < \delta$.

Como $E \subset (x,y)$ e $m(E) = y - x$ então $Z = (x,y) \setminus E$ tem medida nula e, portanto,

$$m((x,y) \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j) = m(E \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j) + m(Z \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j) = m(E \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j) < \delta. \tag{4.27}$$

Segue que

$$\delta > m((x,y) \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j) = m((x,y)) - m(\cup_{j=1}^{N} I_j)$$
$$= y - x - \sum_{j=1}^{N} m(I_j) = y - x - \sum_{j=1}^{N} h_j$$

Dessa forma, temos

iii) $y - x - \delta \leq \sum_{j=1}^{N} h_j$.

Como os intervalos I_j são dois a dois disjuntos e contidos em (x,y) a soma de seus comprimentos não ultrapassa $y - x$.

Segue de i) que

iv)
$$\sum_{j=1}^{N} |f(\xi_j + h_j) - f(\xi_j)| < \varepsilon \sum_{j=1}^{N} h_j \leq \varepsilon(y - x)$$

Coloque $(x,y) \setminus \cup_{j=1}^{N} I_j = \cup_{i=1}^{N+1} (a_i, b_i)$, reunião disjunta, e ordene estes intervalos de modo que

$$a_1 = x < b_1 = \xi_1 < a_2 = \xi_1 + h_1 < \cdots < b_j = \xi_j < a_{j+1} = \xi_j + h_j < \cdots$$
$$\cdots < a_{N+1} = \xi_N + h_N < b_{N+1} = y.$$

Segue de (4.27) que $\sum_{i=1}^{N+1} (b_i - a_i) < \delta$.

Dessa forma, segue de iv) e da continuidade absoluta de f que

$$|f(y) - f(x)| = |f(b_{N+1}) - f(a_1)|$$
$$= |[\sum_{j=1}^{N+1} f(b_j) - \sum_{j=1}^{N} f(b_j)] + [\sum_{j=1}^{N} f(a_{j+1}) - \sum_{j=1}^{N+1} f(a_j)]|$$
$$= |\sum_{j=1}^{N+1} (f(b_j) - f(a_j)) + \sum_{j=1}^{N} (f(a_{j+1}) - f(b_j))|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N+1} |f(b_j) - f(a_j)| + \sum_{j=1}^{N} |f(a_{j+1}) - f(b_j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} |f(b_j) - f(a_j)| + \sum_{j=1}^{N} |f(\xi_j + h_j) - f(\xi_j)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon(y - x) = \varepsilon(1 + y - x).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $f(y) = f(x)$, ou seja, f é constante.

□

Observação 4.28 *Como observado acima, a função de Cantor tem derivada nula quase sempre. No entanto, ela não é constante. Consequentemente, a função de Cantor não é absolutamente contínua, embora seja de variação limitada por ser crescente.*

Se $f \in \mathscr{L}^1([a, b])$, segue da Proposição 3.31 que se $\int_E f = 0$ para todo mensurável $E \subset [a, b]$ então $f = 0$ quase sempre. O próximo lema diz que a mesma conclusão é válida se tivermos $\int_{[a,x]} f = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Lema 4.29 *Se $f \in \mathscr{L}^1([a, b])$ e $F(x) = \int_a^x f = 0$ para todo $x \in [a, b]$ então $f = 0$ quase sempre.*

Demonstração: Suponha que f não seja igual a zero quase sempre. Dessa forma, pelo menos um dos seguintes conjuntos

$$\{x \in [a, b]; f(x) > 0\} \quad \text{ou} \quad \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$$

tem medida positiva.

Suponha que $m(\{x \in [a, b]; f(x) > 0\}) > 0$. O outro caso é tratado de forma análoga.

Como $E \doteq \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$ é mensurável, existe um fechado $F \subset E$ tal que $m(E \setminus F) < m(E)/2$. Segue que

$$m(F) = m(E) - m(E \setminus F) > m(E) - m(E)/2 = m(E)/2 > 0.$$

Afirmação: $\int_F f > 0$. De fato, como

$$F = \{x \in F; f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in F; f(x) > 1/n\}$$

e $m(F) > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_0 \doteq \{x \in F; f(x) > 1/n_0\}$ tem medida positiva.

Logo, como $f > 0$ em F,

$$\int_F f \geq \int_{F_0} f \geq \frac{1}{n_0} m(F_0) > 0.$$

Coloque $\mathscr{O} = (a,b) \setminus F = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, reunião disjunta.

Como

$$0 = \int_a^b f = \int_{\mathscr{O}} f + \int_F f$$

Temos

$$0 > -\int_F f = \int_{\mathscr{O}} f = \int_{\cup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(a_i,b_i)} f$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)] = 0,$$

um absurdo. Portanto, $m(E) = 0$.

$\square$

Teorema 4.30 *Sejam $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$, $c \in \mathbb{R}$ e*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b], (F(a) = c)$$

então $F' = f$ quase sempre.

Demonstração: Suponha que o teorema seja válido para funções integráveis não negativas. Dada $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$, escrevemos $f = f^+ - f^-$. Temos $f^+, f^- \in \mathscr{L}^1([a,b])$.

Assim,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^x f^+(t)\,dt}_{G_1(x)} - \underbrace{\int_a^x f^-(t)\,dt}_{G_2(x)} = G_1(x) - G_2(x)$$

e $G_1'(x) = f^+(x)$ e $G_2(x) = f^-(x)$ para quase todo $x \in [a, b]$, ou seja,

$$[F(x) - F(a)]' = [G_1(x) - G_2(x)]' = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

para quase todo $x \in [a, b]$. Como $F(x) = [F(x) - F(a)] + F(a)$, concluímos que F é derivável quase sempre e $F'(x) = f(x)$ para quase todo $x \in [a, b]$.

Ou seja, podemos supor que $f \geq 0$.

Além disso, podemos supor que $f \geq 0$ seja limitada. De fato, suponha que o teorema seja válido para funções não negativas, integráveis e limitadas. Dada $f \in \mathscr{L}^1([a, b])$ não negativa defina $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, $x \in [a, b]$. Temos que f_n é integrável, não negativa e limitada, $0 \leq f_n \leq n$.

Como $f - f_n \geq 0$, a função

$$F_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))\,dt, \quad x \in [a, b]$$

é crescente (se $a \leq x < y \leq b$ então $F_n(y) - F_n(x) = \int_x^y (f(t) - f_n(t))\,dt \geq 0$).

Pelo Teorema 4.8 F_n' existe quase sempre e $F_n' \geq 0$ quase sempre.

Como f_n é integrável, não negativa e limitada temos, pela hipótese que estamos fazendo, que

$$\left[\int_a^x f_n(t)\,dt\right]' = f_n(x), \quad \text{quase sempre.}$$

Mas como

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt = F(a) + \int_a^x (f(t) - f_n(t))\,dt + \int_a^x f_n(t)\,dt$$

$$= F(a) + F_n(x) + \int_a^x f_n(t)\,dt,$$

segue que F é derivável quase sempre e $F'(x) = F_n'(x) + f_n(x) \geq f_n(x)$ para quase todo $x \in [a, b]$. Portanto, tomando o limite em n, obtemos $F'(x) \geq f(x)$ para quase todo $x \in [a, b]$.

Assim,

$$\int_a^b F'(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{4.31}$$

Note que F é crescente pois estamos supondo $f \geq 0$. Assim, pelo Teorema 4.8 temos

$$\int_a^b F'(x)\, dx \leq F(b) - F(a). \tag{4.32}$$

Combinando (4.31) e (4.32) chegamos a

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

isto é

$$\int_a^b [F'(x) - f(x)]\, dx = 0.$$

Mas $F' - f \geq 0$ quase sempre, portanto, $F'(x) = f(x)$ quase sempre.

Mostremos, enfim, que o teorema é válido para funções integráveis, não negativas e limitadas em $[a, b]$. Se f é uma tal função, seja $K > 0$ tal que $0 \leq f \leq K$.

Pelo Teorema 4.25 $F \in \mathrm{BV}([a, b])$ (na verdade, F é absolutamente contínua pelo Teorema 4.24). Logo, F é derivável quase sempre e $F' \in \mathscr{L}^1([a, b])$. Estenda $F(x) = F(b)$ para $x > b$ e defina

$$f_n(x) = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n \int_x^{x+1/n} f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

Temos $0 \leq f_n \leq K$.

Como $f_n \to F'$ quase sempre em $[a, b]$, segue do Teorema 3.38 que, para todo $d \in [a, b]$

$$\int_a^d F'(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^d f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} n \int_a^d [F(x + 1/n) - F(x)]\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^d F(x+1/n)\,dx - \int_a^d F(x)\,dx\right]$$

$$\overset{\text{Ex. Res. 3.46}}{=} \lim_{n\to\infty} n\left[\int_{a+1/n}^{d+1/n} F(x)\,dx - \int_a^d F(x)\,dx\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_d^{d+1/n} F(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} F(x)\,dx\right]$$

$$\overset{F\text{ cont.}}{=} F(d) - F(a) = \int_a^d f(x)\,dx,$$

$|n\int_d^{d+1/n} F dx - F(d)| =$
$|n\int_d^{d+1/n} (F - F(d))\,dx| \leq$
$n\int_d^{d+1/n} |F - F(d)|\,dx \leq$
$\max_{[d,d+1/n]} |F(x) - F(d)|$
$\to 0$ quando $n \to \infty$

ou seja,

$$\int_a^d [F'(x) - f(x)]\,dx = 0 \quad \text{para todo } d \in [a,b].$$

Segue do Lema 4.29 que $F' = f$ quase sempre.

□

O Teorema Fundamental do Cálculo pode ser enunciado da seguinte maneira

Teorema 4.33 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. São equivalentes*

(a) f é de classe C^1 em $[a,b]$.

(b) Existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

Como toda função contínua é integrável segundo Riemann, pelo que foi estudado na Seção 3.2, a integral no enunciado acima pode ser tanto a integral de Riemann como a integral de Lebesgue.

Para a integral de Lebesgue temos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo:

Teorema 4.34 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. São equivalentes*

(a) f é absolutamente contínua em $[a,b]$.

(b) f' existe quase sempre, $f' \in \mathscr{L}^1([a,b])$ e $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

Demonstração: Suponha que *(b)* seja válido. Pelo Teorema 4.24 f é absolutamente contínua em $[a, b]$.

Reciprocamente, suponha que f seja absolutamente contínua em $[a, b]$. Pelo Teorema 4.23 f é de variação limitada em $[a, b]$ e pelo Corolário 4.21 f' existe quase sempre e é integrável em $[a, b]$.

Coloque $F(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$. Teorema 4.24 F é absolutamente contínua e pelo Teorema 4.30 $F' = f'$ quase sempre.

Portanto, $F - f$ é absolutamente contínua e $(F - f)' = 0$ quase sempre. Pelo Teorema 4.26 $F - f$ é constante em $[a, b]$. Portanto, para todo $x \in [a, b]$ temos $F(x) - f(x) = F(a) - f(a) = -f(a)$, isto é,

$$f(x) = f(a) + F(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt.$$

$\square$

Definição 4.35 *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é chamada de singular se para quase todo $x \in [a, b]$ tem-se $f'(x) = 0$.*

A função de Cantor é exemplo de uma função singular que não é constante.

O Teorema 4.26 diz que toda função que é simultaneamente singular e absolutamente contínua é constante.

O teorema a seguir diz que toda função de variação limitada se decompõe de modo essencialmente único como soma de uma função absolutamente contínua e uma função integrável singular.

Teorema 4.36 *Se $f \in BV([a, b])$ então existem $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que g é absolutamente contínua em $[a, b]$, $h \in \mathscr{L}^1([a, b])$ é singular e $f = g + h$. Além disso, g e h são únicas a menos de constantes aditivas.*

Demonstração: Como f é de variação limitada, pelo Corolário 4.21 sua derivada existe quase sempre e é uma função integrável.

Defina $g(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$, que é absolutamente contínua, e coloque $h = f - g$.

Temos $h \in \mathscr{L}^1([a, b])$ pois $f \in \mathscr{L}^1([a, b])$ pelo Corolário 4.20 e g é (absolutamente) contínua em $[a, b]$. Além do mais, pelo Teorema 4.30 $g' = f'$ quase sempre e, portanto, $h' = (f - g)' = f' - g' = f' - f' = 0$ quase sempre. Ou seja, h é singular e integrável e $f = g + h$.

Suponha agora que $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ com g_1 e g_2 absolutamente contínuas e h_1 e h_2 integráveis e singulares.

Temos que $\varphi \doteq g_1 - g_2 = h_2 - h_1$ é tanto absolutamente contínua quanto integrável e singular. Segue do Teorema 4.26 que $\varphi = K$ para alguma constante $K \in \mathbb{R}$. Portanto, g_1 e g_2 diferem por constante e o mesmo ocorre com h_1 e h_2.

$\square$

Capítulo 5

Os espaços L^p

5.1 Definição e propriedades

Dada uma função mensurável f em E definimos o supremo essencial de $|f|$ em E por

$$\sup \operatorname{ess}_E |f| = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

com a convenção de que $\inf \varnothing = +\infty$.

Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável e $0 < p \leq \infty$ defina

$$||f||_p \doteq ||f||_{p,E} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se} \quad 0 < p < \infty \\ \\ \sup \operatorname{ess}_E |f| & \text{se} \quad p = \infty \end{cases} \in [0, \infty].$$

Para $0 < p \leq \infty$ defina

$$\mathscr{L}^p(E) = \{f : E \to \mathbb{R}; ||f||_p < \infty\}.$$

Como fizemos na página 106 considere agora a relação equivalência em $\mathscr{L}^p(E)$ dada por $f \sim g$, $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$, se $f = g$ quase sempre.

É claro que se $f \sim g$, $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$ e $0 < p < \infty$ então $||f||_p = ||g||_p$. Enquanto que se $p = \infty$, temos $m(\{x \in E; f(x) > \alpha\}) = m(\{x \in E; g(x) > \alpha\})$ para todo α e, portanto, $||f||_\infty = ||g||_\infty$.

Dessa forma fica bem definida a quantidade $||[f]||_p \doteq ||f||_p$, $0 < p \leq \infty$, sendo $[f]$ a classe de equivalência de $f \in \mathscr{L}^p(E)$.

Os espaços $L^p(E)$, $0 < p \leq \infty$ são definidos por

$$L^p(E) = \mathscr{L}^p(E)/\sim .$$

Veremos que se $1 \leq p \leq \infty$ então $(L^p(E), ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado e observamos que se $0 < p < 1$ então $L^p(E)$ se torna um espaço (vetorial) métrico com a distância $d_p(f,g) = ||f-g||_p^p$.

A próxima proposição deixa claro o porquê do nome de supremo essencial para $||f||_\infty$ quando $f \in L^\infty(E)$.

Proposição 5.1 *Se $f \in L^\infty(E)$ então $|f| \leq ||f||_\infty$ quase sempre.*

Demonstração: Sejam

$$E_n = \{x \in E; |f(x)| > \frac{1}{n} + ||f||_\infty\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$E_\infty = \{x \in E; |f(x)| > ||f||_\infty\}.]$$

Para mostrar que $|f| \leq ||f||_\infty$ quase sempre, precisamos mostrar que $m(E_\infty) = 0$.

Temos $E_n \subset E_{n+1}$, $\cup_{n=1}^\infty E_n \subset E_\infty$ e se $x \in E_\infty$, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/(|f(x)| - ||f||_\infty)$, vemos que $x \in E_n$. Portanto, $\cup_{n=1}^\infty E_n = E_\infty$ e, consequentemente,

$$m(E_\infty) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Se $m(E_\infty) > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(E_{n_0}) > 0$.

Como

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} < \infty$$

existe $\alpha \in [||f||_\infty, ||f||_\infty + 1/n_0)$ tal que $m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Portanto,

$$0 < m(E_{n_0}) = m(\{x \in E; |f(x)| > \frac{1}{n_0} + ||f||_\infty\})$$

$$\leq m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0,$$

que é um absurdo.

Assim, $m(E_\infty) = 0$.

□

Proposição 5.2 *Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável e se $M \geq 0$ é tal que $|f(x)| \leq M$ quase sempre então $f \in L^\infty(E)$, $||f||_\infty \leq M$ e*

$$||f||_\infty = \inf\{K \geq 0; |f| \leq K \textit{ quase sempre}\}.$$

Demonstração: Como $|f(x)| \leq M$ quase sempre,

$$M \in \{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

e, portanto,

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} \leq M$$

Segue que $f \in L^\infty(E)$ e

$$||f||_\infty \leq \inf\{K \geq 0; |f| \leq K \text{ quase sempre}\}.$$

Pela Proposição 5.1, $||f||_\infty \in \{K \geq 0; |f| \leq K \text{ quase sempre}\}$, logo,

$$||f||_\infty = \inf\{K \geq 0; |f| \leq K \text{ quase sempre}\}.$$

□

Corolário 5.3 $(L^\infty(E), ||\cdot||_\infty)$ *é um espaço vetorial normado.*

Demonstração: Sejam $f, g \in L^\infty(E)$.

Pela Proposição 5.1

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \quad \text{quase sempre}$$

e pela Proposição 5.2

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Assim, $f+g \in L^\infty(E)$ e vale a desigualdade triangular para $||\cdot||_\infty$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ então

$$\sup \operatorname{ess}_E |0f| = \sup \operatorname{ess}_E 0 = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; 0 > \alpha\}) = 0\}$$
$$= \inf\{\alpha \geq 0; m(\varnothing) = 0\} = 0 = 0||f||_\infty.$$

Se $\lambda \neq 0$ então

$$\sup \operatorname{ess}_E |\lambda f| = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |\lambda f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$
$$= \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha/|\lambda|\}) = 0\}$$
$$= \inf\{|\lambda|(\alpha/|\lambda|) \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha/|\lambda|\}) = 0\}$$
$$= \inf\{|\lambda|\beta \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \beta\}) = 0\}$$
$$= |\lambda| \inf\{\beta \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \beta\}) = 0\} = |\lambda| ||f||_\infty.$$

Portanto, $\lambda f \in L^\infty(E)$ e valem $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty$ e $||0||_\infty = 0$.

Claramente, $||f||_\infty \geq 0$.

Finalmente, se $||f||_\infty = 0$ então pela Proposição 5.1, $|f| \leq 0$ quase sempre. Ou seja, $f = 0$ quase sempre, isto é, a classe $[f]$ é a classe nula.

$\square$

Teorema 5.4 *Se $m(E) < \infty$ e $f \in L^\infty(E)$ então $f \in L^p(E)$ para todo $p > 0$ e*

$$\lim_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Demonstração: Se $m(E) = 0$ então $||f||_p = ||f||_\infty = 0$ e o teorema está provado.

Suponha que $m(E) > 0$.

Como $|f| \leq ||f||_\infty$ quase sempre, segue que $|f|^p \leq ||f||_\infty^p$ quase sempre e daí

$$\int_E |f|^p \leq \int_E ||f||_\infty^p = ||f||_\infty^p m(E) < \infty. \tag{5.5}$$

Agora, se $\alpha < ||f||_\infty$ então o conjunto

$$A \doteq \{x \in E; |f(x)| > \alpha\}$$

tem medida positiva e, sendo assim, $\lim_{p\to\infty}(m(A))^{1/p} = 1$.

Como,

$$||f||_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \geq \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p} \geq \alpha(m(A))^{1/p},$$

temos

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq \alpha, \quad \text{para todo } \alpha < ||f||_\infty.$$

Portanto,

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq ||f||_\infty.$$

Por (5.5)

$$||f||_p \leq ||f||_\infty m(E)^{1/p}$$

e, portanto,

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq ||f||_\infty \lim_{p\to\infty} m(E)^{1/p} = ||f||_\infty,$$

pois $m(E) > 0$.

Assim,

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq ||f||_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} ||f||_p,$$

isto é ,

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

□

Teorema 5.6 *Se* $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ *e* $m(E) < \infty$ *então* $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$.

Demonstração: Se $p_2 = \infty$ o resultado segue do Teorema 5.4.

Suponha que p_2 seja finito.

Temos

$$\int_E |f|^{p_1} = \int_{\{x\in E; |f(x)|\leq 1\}} |f|^{p_1} + \int_{\{x\in E; |f(x)|>1\}} |f|^{p_1} \leq m(E) + \int_E |f|^{p_2} < \infty.$$

□

Proposição 5.7 *$L^p(E)$, $0 < p \leq \infty$, é um espaço vetorial.*

Demonstração: O caso $p = \infty$ foi demonstrado no Corolário 5.3.
Suponha que $0 < p < \infty$. Sejam $f, g \in L^p(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Temos

$$\int_E |\lambda f|^p = |\lambda|^p \int_E |f|^p, \quad \text{portanto, } ||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p < \infty.$$

Assim, $\lambda f \in L^p(E)$.
Como

$$(|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

obtemos

$$\int_E |f + g|^p \leq \int_E (|f| + |g|)^p \leq 2^p \int_E (|f|^p + |g|^p) = 2^p(||f||_p^p + ||g||_p^p) < \infty.$$

Assim, $f + g \in L^p(E)$.

$\square$

O Corolário 5.3 diz que $||\cdot||_\infty$ é uma norma. Na demonstração do teorema acima vimos que se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^p(E)$ então $||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p$. Também é claro que $||f||_p \geq 0$ e $||f||_p = 0$ se e somente se $f = 0$ quase sempre, isto é, $[f] = 0$. Para mostrar que $||\cdot||_p$ é uma norma, resta mostrar a desigualdade triangular. Note que da demonstração do Teorema 5.7 segue apenas que $||f + g||_p \leq 2(||f||_p^p + ||g||_p^p)^{1/p}$.

Lema 5.8 *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ e $0 < \lambda < 1$. Então*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \tag{5.9}$$

com a igualdade valendo se e somente se $\alpha = \beta$.

Demonstração: Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ a equação (5.9) é trivial e se vale a igualdade, digamos, com $\alpha = 0$ então $0 = (1 - \lambda)\beta$, ou seja, $\beta = 0 = \alpha$.
Suponha que $\alpha, \beta > 0$.

Defina $\varphi(t) = 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda$, $t > 0$. Temos

$$\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1}) \begin{cases} < 0 \text{ se } 0 < t < 1 \\ = 0 \text{ se } t = 1 \\ > 0 \text{ se } 1 < t \end{cases}.$$

Logo, $t = 1$ é ponto de mínimo global de φ, $\varphi(1) = 0$ e $\varphi(t) = 0$ se e somente se $t = 1$.

Assim, $0 \leq \varphi(\alpha/\beta)$ e $\varphi(\alpha/\beta) = 0$ se e somente se $\alpha = \beta$.

Mas,

$$0 \leq \varphi(\alpha/\beta) \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda \leq 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha^\lambda\beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

e

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha/\beta) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda = 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha^\lambda\beta^{1-\lambda} = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$

□

Dado $p \in [1, \infty]$ definimos o expoente conjugado de p como sendo o único $p^* \doteq q \in [1, \infty]$ que satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

com a convenção que $1/\infty = 0$. É claro que o expoente conjugado de q é p.

Temos que se $1 < p < \infty$ então $q = p/(p-1)$, se $p = 1$ então $q = \infty$ e se $p = \infty$ então $q = 1$. Em particular, se $p = 2$ então $q = 2$.

Teorema 5.10 (Desigualdade de Hölder) *Sejam p e q expoentes conjugados. Se f e g são mensuráveis em E então vale a seguinte desigualdade*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q. \tag{5.11}$$

Em particular, se $f \in L^p(E)$ *e* $g \in L^q(E)$ *então* $fg \in L^1(E)$*; além do mais, igualdade ocorre em* (5.11) *no caso em que* $1 < p, q < \infty$ *se e somente se e* $||g||_q^q |f|^p = ||f||_p^p |g|^q$ *quase sempre.*

Demonstração: Se $||f||_p = 0$ ou $||g||_q = 0$ então $f = 0$ ou $g = 0$ quase sempre. Logo, $fg = 0$ quase sempre. Dessa forma, valem a igualdade em (5.11) e $||g||_q^q |f|^p = ||f||_p^p |g|^q$.

Podemos supor então que $0 < ||f||_p, ||g||_q$.

Se $||f||_p = \infty$ ou $||g||_q = \infty$ então o lado ditreito de (5.11) é infinito e não há nada mais a provar.

Vamos portanto supor que $0 < ||f||_p, ||g||_q < \infty$.

Se $p = 1$ então $q = \infty$ e

$$||fg||_1 = \int |fg| = \int |f||g| \leq ||g||_\infty \int |f| = ||f||_1 ||g||_\infty.$$

De modo análogo se prova o caso em que $p = \infty$.

Suponha agora que $1 < p < \infty$ e, consequentemente, temos $1 < q < \infty$.

Coloque $F = |f|/||f||_p$ e $G = |g|/||g||_q$. Temos $||F||_p = ||G||_q = 1$.

Aplicando o Lema 5.8 com $\alpha = F(x)^p$, $\beta = G(x)^q$ e $\lambda = p^{-1}$, observando que $1 - \lambda = q^{-1}$, obtemos

$$F(x)G(x) \leq p^{-1}F(x)^p + q^{-1}G(x)^q \tag{5.12}$$

e

$$\int FG \leq p^{-1} \int F^p + q^{-1} \int G^q = p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{5.13}$$

Portanto,

$$\int |fg| = ||f||_p ||g||_q \int FG \leq ||f||_p ||g||_q,$$

isto é,

$$\int |fg| \leq ||f||_p ||g||_q. \tag{5.14}$$

Agora, como $||F||_p = ||G||_q = 1$

$$\int |fg| = ||f||_p ||g||_q \Leftrightarrow \int FG = 1 \Leftrightarrow \int FG = ||F||_p ||G||_q = 1$$

$$\int FG = 1 \Leftrightarrow \int FG = p^{-1} + q^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \int FG = p^{-1}||F||_p^p + q^{-1}||G||_q^q \Leftrightarrow \int FG = p^{-1}\int F^p + q^{-1}\int G^q$$

$$\Leftrightarrow \int FG = \int (p^{-1}F^p + q^{-1}G^q) \Leftrightarrow \int (p^{-1}F^p + q^{-1}G^q - FG) = 0.$$

Mas, por (5.12) $p^{-1}F^p + q^{-1}G^q - FG \geq 0$. Logo,

$$\int (p^{-1}F^p + q^{-1}G^q - FG) = 0 \Leftrightarrow FG = p^{-1}F^p + q^{-1}G^q \text{ q. s.}$$

$$\overset{\text{Lema 5.8}}{\Leftrightarrow} F^p = G^q \text{ q. s. } \Leftrightarrow |f|^p/||f||_p^p = |g|^q/||g||_q^q \text{ q. s.}$$
$$\Leftrightarrow ||g||_q^q|f|^p = ||f||_p^p|g|^q \text{ q. s. .}$$

□

Com a desigualdade de Hölder podemos provar que $||\cdot||_p$ satisfaz a desigualdade triangular.

Teorema 5.15 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ são mensuráveis e $p \in [1, \infty]$ então*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \tag{5.16}$$

Demonstração: Se $||f||_p = \infty$ ou $||g||_p = \infty$, o lado direito de (5.16) e infinito e o teorema está provado.

Se $||f + g||_p = 0$ também não há mais nada a ser demonstrado.

O caso em que $p = \infty$ foi demonstrado no Corolário 5.3. O caso $p = 1$ é trivial pois $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Suponhamos assim que $1 < p < \infty$, que $f, g \in L^p(E)$ e $||f + g||_p \neq 0$ (portanto, $0 < ||f + g||_p < \infty$). Seja q o expoente conjugado de p, isto é, $q = p/(p - 1)$.

$$||f + g||_p^p = \int |f + g|^p = \int |f + g|^{p-1}|f + g| \leq \int |f + g|^{p-1}[|f| + |g|]$$

$$= \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |g|^p\right)^{1/p}$$

$$\overset{(p-1)q=p}{=} \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \left[\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$= ||f+g||_p^{p/q} \left(||f||_p + ||g||_p\right).$$

Portanto,

$$||f+g||_p = ||f+g||_p^{p-p/q} \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

□

Corolário 5.17 *Se $1 \leq p \leq \infty$ então $(L^p(E), ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado.*

Exemplo 5.18 *Se $0 < p < 1$ então $||\cdot||_p$ não é uma norma em $L^p((0,1))$.*

Sejam $f = \chi_{(0,1/2)}$ e $g = \chi_{[1/2,1)}$. Temos

$$||f+g||_p = ||1||_p = \left(\int_{(0,1)} 1\right)^{1/p} = 1,$$

$$||f||_p = \left(\int_{(0,1/2)} 1\right)^{1/p} = 2^{-1/p}$$

e

$$||g||_p = \left(\int_{[1/2,1)} 1\right)^{1/p} = 2^{-1/p}.$$

Assim,

$$||f||_p + ||g||_p = 2 \cdot 2^{-1/p} = 2^{1-1/p} < 1 = ||f+g||_p.$$

5.2 Funcionais lineares limitados

Definição 5.19 *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência (x_n) de elementos de X converge em X se existir $x \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x|| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.*

Definição 5.20 *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência (x_n) de elementos de X é chamada de sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$.*

Definição 5.21 *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que X é um espaço de Banach (ou completo) se toda sequência de Cauchy em X converge para algum elemento de X.*

Definição 5.22 *Seja X um espaço vetorial normado. Dada uma sequência (x_n) de elementos de X dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em X se a sequência $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ convergir em X.*

Definição 5.23 *Seja X um espaço vetorial normado. Dada uma sequência (x_n) de elementos de X dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente em X se série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ for convergente em $\mathbb{R}$.*

Teorema 5.24 *Um espaço vetorial normado X é um espaço de Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em X é convergente em X.*

Demonstração: Suponha que X seja espaço de Banach. Seja (x_n) uma sequência de elementos de X tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente em X.

Coloque $M = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 2$ tal que

$$|M - \sum_{n=1}^{N-1} ||x_n||| = \sum_{n=N}^{\infty} ||x_n|| < \varepsilon.$$

Seja $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Para todos $n, m \geq N$, $n \geq m$, temos

$$||s_n - s_m|| = ||\sum_{j=m+1}^{n} x_j|| \leq \sum_{j=m+1}^{n} ||x_j|| \leq \sum_{n=N}^{\infty} ||x_n|| < \varepsilon,$$

ou seja, (s_n) é uma sequência de Cauchy em X. Como X é Banach, (s_n) converge em X, isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em X.

Reciprocamente, suponha que toda série absolutamente convergente em X seja convergente em X. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X. A estratégia da prova é encontrar uma subsequência de (x_n) que seja convergente. Para isso, buscaremos uma subsequência que tenha como termo geral a soma parcial de uma série que seja absolutamente convergente.

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_1$ então

$$||x_n - x_m|| < 2^{-1}.$$

Indutivamente, suponha que tenhamos $n_1 < \cdots < n_k$ tal que se $n, m \geq n_j$ então

$$||x_n - x_m|| < 2^{-j}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Como (x_n) é de Cauchy existe $n_{k+1} > n_k$ tal que se $n, m \geq n_{k+1}$ então

$$||x_n - x_m|| < 2^{-k-1}.$$

Assim, existe uma sequência estritamente crescente de números naturais n_k satisfazendo

$$||x_n - x_m|| < 2^{-k} \quad \text{para todos } n, m \geq n_k.$$

Defina a sequência (y_k) em X por

$$y_k = \begin{cases} x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, & \text{se } k \geq 2 \\ x_{n_1}, & \text{se } k = 1 \end{cases}.$$

Sejam $t_k = \sum_{j=1}^{k} y_j$ e $s_k = \sum_{j=1}^{k} ||y_j||$.
Note que

$$t_k = \sum_{j=1}^{k} y_j = y_1 + \sum_{j=2}^{k} y_j = x_{n_1} + \sum_{j=2}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) = x_{n_k}. \tag{5.25}$$

Como s_k é crescente, para mostrar que ela é convergente basta mostrar que é limitada. Temos

$$0 \leq s_k = \sum_{j=1}^{k} ||y_j|| = ||y_1|| + \sum_{j=2}^{k} ||y_j||$$

$$= ||x_{n_1}|| + \sum_{j=2}^{k} ||x_{n_j} - x_{n_{j-1}}|| \leq ||x_{n_1}|| + \sum_{j=1}^{k} 2^{-j+1} < ||x_{n_1}|| + 2,$$

vemos que s_k converge em $\mathbb{R}$, isto é, $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ é absolutamente convergente. Por hipótese, $\sum_{j=1}^{\infty} y_j = \lim_{k\to\infty} t_k$ é convergente. Por (5.25), a subsequência (x_{n_k}) converge em X. Seja $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Mostremos que (x_n) converge para x. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ então $||x_n - x_m|| < \varepsilon/2$. Como $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $||x - x_{n_k}|| < \varepsilon/2$ se $k \geq K$. Tome $k \geq K$ tal $n_k \geq N$. Assim, para todo $n \geq N$

$$||x - x_n|| \leq ||x - x_{n_k}|| + ||x_{n_k} - x_n|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto, X é um espaço de Banach.

$\square$

Teorema 5.26 *Se $1 \leq p \leq \infty$ então $L^p(E)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Vejamos o caso $p = \infty$.

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $L^\infty(E)$.

Pela Proposição 5.1 para cada $n, m \in \mathbb{N}$ existe um conjunto de medida nula $Z_{n,m} \subset E$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty, \quad x \in E \setminus Z_{n,m}.$$

Coloque $Z = \cup_{n,m\in\mathbb{N}} Z_{n,m}$. Temos $m(Z) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$ se $n, m \geq n_0$. Logo, para todo $x \in E \setminus Z$ temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, se $n, m \geq n_0$. Ou seja, a sequência de funções (f_n) é *uniformemente de Cauchy* em $E \setminus Z$ pois n_0 só depende de

ε. Desta forma, f_n converge uniformemente em $E \setminus Z$. De fato, como (f_n) é uniformemente de Cauchy em $F \doteq E \setminus Z$, é trivialmente uma sequência de Cauchy. Logo, converge pontualmente para alguma função h em F. Mostremos que esta convergência é, de fato, uniforme.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ então, para todo $x \in F$, temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$.

Para cada $x \in F$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_x$, $|f_n(x) - h(x)| < \varepsilon/3$. Coloque $M_x = \max\{N, N_x\}$.

Dessa forma, se $n \geq N$ e para todo $x \in F$ temos

$$|f_n(x) - h(x)|$$

$$\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_{M_x}(x)| + |f_{M_x}(x) - h(x)| < \varepsilon,$$

ou seja, f_n converge uniformemente para h em F.

Defina

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in F \\ 0, & \text{se } x \in Z \end{cases}.$$

Note que f é mensurável pois é igual quase sempre ao limite de uma sequência de funções mensuráveis.

Note que f_n converge uniformemente para $f = h$ em $F = E \setminus Z$. Desta forma, se $\alpha \geq \varepsilon$ e $n \geq N$ então

$$\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \alpha\} \subset \{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset Z$$

e, consequentemente, $m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) = 0$.

Assim, se $n \geq N$

$$||f_n - f||_\infty = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) = 0\} \leq \varepsilon. \tag{5.27}$$

Claramente $f \in L^\infty(E)$, pois $f = (f - f_N) + f_N$, e de (5.27) temos que f_n converge para f em $L^\infty(E)$.

Suponha agora que $1 \leq p < \infty$.

Pelo Teorema 5.24 basta mostrarmos que se $f_n \in L^p(E)$ é tal que

$$M \doteq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p$$

é convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para alguma função de $L^p(E)$.

Seja $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$ e coloque $g = \lim_{n\to\infty} g_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$. Temos

$$g_n(x) \nearrow g(x) \in [0, \infty]$$

e, portanto,

$$g_n^p(x) \nearrow g^p(x) \in [0, \infty].$$

Pela desigualdade de Minkowski

$$||g_n||_p = ||\sum_{k=1}^{n} |f_k|||_p \le \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_p \le \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p = M.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$||g||_p^p = \int |g|^p = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p \le M^p,$$

isto é, $||g||_p \le M$.

Portanto, $g \in L^p(E)$, isto é, g^p é integrável. Segue que g^p é finita quase sempre e, assim, $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ também é finita quase sempre. Seja $Z \subset E$ um conjunto de medida nula tal que $g(x) \in [0, \infty)$ se $x \in E \setminus Z$.

Assim, se $x \in E \setminus Z$ a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo (um espaço de Banach), $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge para todo $x \in E \setminus Z$.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), & \text{se } x \in E \setminus Z \\ 0, & \text{se } x \in Z \end{cases}.$$

Claramente f é mensurável.

Mostremos que $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ converge para f em $L^p(E)$.

Pela definição de f temos que s_n converge pontualmente para f em $E \setminus Z$.

Também

$$|s_n| = |\sum_{k=1}^{n} f_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = g \in L^p(E)$$

e, portanto, em $E \setminus Z$ vale $|f| = \lim_{n\to\infty} |s_n| \leq g$. Assim, $||f||_p \leq ||g||_p$ e, consequentemente, $f \in L^p(E)$.

Em $E \setminus Z$ temos,

$$|s_n - f|^p \leq (|s_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p \in L^1(E)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - f|^p = (\lim_{n\to\infty} |s_n - f|)^p = 0.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$||s_n - f||_p^p = \int |s_n - f|^p \to 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} ||s_n - f||_p = 0,$$

ou seja, s_n converge para f em $L^p(E)$.

$\square$

Definição 5.28 *Sejam X um espaço vetorial normado e $F : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Dizemos que F é limitado se existir $K \geq 0$ tal que*

$$|F(x)| \leq K||x||, \quad \forall x \in X.$$

Proposição 5.29 *As seguintes afirmações são equivalentes para um funcional linear $F : X \to \mathbb{R}$ definido num espaço vetorial normado.*

i) F é limitado.

ii) F é contínuo na origem.

iii) F é contínuo em X.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Existe $K \geq 0$ tal que

$$|F(x)| \leq K||x||, \quad \forall x \in X.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon/(K+1) > 0$. Se $||x|| < \delta$ então

$$|F(x) - F(0)| = |F(x)| \leq K||x|| \leq K\delta = \frac{K}{K+1}\varepsilon < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Sejam $x_o \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como F é contínuo na origem existe $\delta > 0$ tal que $|F(x)| < \varepsilon$ se $||x|| < \delta$.

Assim, se $||x - x_0|| < \delta$ então

$$|F(x) - F(x_0)| = |F(x - x_0)| \leq \varepsilon.$$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Como F é contínuo em X, é contínuo na origem. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $||x|| < \delta$ então $|F(x)| \leq 1$.

Se $x \neq 0$ coloque $x' = \delta x/2||x||$. Como $||x'|| = \delta/2 < \delta$ temos

$$|F(x')| = \frac{\delta}{2||x||}|F(x)| \leq 1 \Rightarrow |F(x)| \leq \frac{2}{\delta}||x||.$$

Como a desigualdade acima também é verdadeira para $x = 0$, vemos que F é limitado.

$\square$

Definição 5.30 *Seja X um espaço vetorial normado. Denotemos por X^* o conjunto dos funcionais lineares limitados em X. X^* é chamado de dual (topológico) de X.*

Como combinações lineares de funcionais lineares contínuos é ainda um funcional linear contínuo, X^* é um espaço vetorial.

Definição 5.31 *Seja $F \in X^*$. Defina*

$$||F|| = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{||x||} = \sup_{x \neq 0} \left| F\left(\frac{x}{||x||}\right)\right| = \sup_{||y||=1} |F(y)|.$$

Segue que se $F \in X^*$ então $|F(x)| \leq ||F||\,||x||$, para todo $x \in X$.

Ex. Resolvido 5.32 *Mostre que se F é como acima então*

$$||F|| = \sup_{||y|| \leq 1} |F(y)|.$$

Resolução: Temos

$$||F|| = \sup_{||y||=1} |F(y)| \leq \sup_{||y||\leq 1} |F(y)|.$$

Por outro lado, dado $y \in X$, $||y|| \leq 1$, $y \neq 0$ temos

$$|F(y)| = ||y|| \left| F\left(\frac{y}{||y||}\right) \right| \leq ||F|| \, ||y|| \leq ||F||.$$

Tomando supremo em y como acima e lembrando que $F(0) = 0$ chegamos a

$$\sup_{||y||\leq 1} |F(y)| = \sup_{\substack{y\neq 0 \\ ||y||\leq 1}} |F(y)| \leq ||F||.$$

Portanto, $||F|| = \sup_{||y||\leq 1} |F(y)|$.

$\blacksquare$

Proposição 5.33 *A função que a cada $F \in X^*$ associa $||F||$ define uma norma. Desta forma, X^* é um espaço vetorial normado quando munido desta norma.*

Demonstração: Sejam $F, G \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Claramente $||F|| \geq 0$. Note que $||F|| = 0$ se e somente se $\sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{||x||} = 0$, isto é, se e somente se $F \equiv 0$.

Também,

$$||\lambda F|| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda F(x)|}{||x||} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{||x||} = |\lambda| ||F||$$

e

$$||F+G|| = \sup_{x\neq 0} \frac{|(F+G)(x)|}{||x||} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)| + |G(x)|}{||x||}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \left(\frac{|F(x)|}{||x||} + \frac{|G(x)|}{||x||} \right) \leq ||F|| + ||G||$$

$\square$

Proposição 5.34 *Sejam $p \in [1, \infty]$ e q seu expoente conjugado. Dada $g \in L^q(E)$ a aplicação que a cada $f \in L^p(E)$ associa*

$$F(f) = \int_E fg \tag{5.35}$$

define um funcional linear limitado de $L^p(E)$, isto é, um elemento de $L^p(E)^*$.

Além do mais, $||F|| = ||g||_q$.

Demonstração: Note que pela desigualdade de Hölder temos que

$$|F(f)| = \left| \int_E fg \right| \leq ||f||_p ||g||_q < \infty.$$

Assim, F está bem definido e pela linearidade da integral é um funcional linear. Ainda pela desigualdade acima temos que F é limitado e $||F|| \leq ||g||_q$.

Resta mostrar que $||F|| = ||g||_q$. Note que se $g = 0$ quase sempre, isto é, se $||g||_q = 0$ então $||F|| = 0 = ||g||_q$.

Suponha que $||g||_q > 0$.

Consideraremos primeiro o caso $1 < p < \infty$.

Coloque $f = |g|^{q/p} \operatorname{sgn} g$, lembrando que sgn de um número real t é igual a 1 se $t > 0$, -1 se $t < 0$ e 0 se $t = 0$.

Como $|f|^p = |g|^q$ e $g \in L^q(E)$ segue que $f \in L^p(E)$ e

$$||f||_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} = \left(\int_E |g|^q \right)^{1/p} = ||g||_q^{q/p} = ||g||_q^{q-1} > 0.$$

Também

$$|F(f)| = \left| \int_E fg \right| = \left| \int_E (|g|^{q/p} \operatorname{sgn} g) g \right| = \int_E |g|^{q/p} |g| = \int_E |g|^{1+q/p}$$

$$= \int_E |g|^{1+q-1} = \int_E |g|^q = ||g||_q^q = ||g||_q ||g||_q^{q-1} = ||g||_q ||f||_p,$$

isto é,

$$|F(f)| = ||g||_q ||f||_p.$$

Portanto, como $||f||_p > 0$,

$$||F|| = \sup_{||h||_p=1} |F(h)| \geq \left| F\left(\frac{f}{||f||_p}\right) \right| = ||g||_q,$$

de onde segue que $||F|| = ||g||_q$.

Suponha agora que $p = \infty$. Logo, $q = 1$.

Seja $f = \operatorname{sgn} g$. Temos $||f||_\infty = 1$ pois g não é a função nula quase sempre. Assim,

$$|F(f)| = \int_E fg = \int_E (\operatorname{sgn} g)g = \int_E |g| = ||g||_1.$$

Portando, $||F|| \geq ||g||_1$.

Suponha agora que $p = 1$. Logo, $q = \infty$.

Se mostrarmos que para todo $\varepsilon > 0$ ocorrer que

$$m(\{x \in E; |g(x)| \geq ||F|| + \varepsilon\}) = 0$$

então $||g||_\infty \leq ||F||$.

Suponha que para algum $\varepsilon > 0$ tenhamos

$$m(\{x \in E; |g(x)| \geq ||F|| + \varepsilon\}) > 0.$$

Como

$$\{x \in E; |g(x)| \geq ||F|| + \varepsilon\} = \cup_{k\geq 1}[-k, k] \cap \{x \in E; |g(x)| \geq ||F|| + \varepsilon\}$$

existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \doteq [-k, k] \cap \{x \in E; |g(x)| \geq ||F|| + \varepsilon\} \subset \{x \in E; |g(x)| \geq ||F|| + \varepsilon\}$$

tem medida positiva. Note que também temos $m(A) \leq 2k$.

Seja

$$f = \frac{1}{m(A)} \chi_A \operatorname{sgn} g.$$

Como em A vale $|g(x)| > 0$ temos $|\operatorname{sgn} g| = 1$ em A e

$$||f||_1 = \int_E \frac{1}{m(A)}\chi_A |\operatorname{sgn} g| = \int_E \frac{1}{m(A)}\chi_A = 1.$$

Mas,

$$||F|| = \sup_{||h||_1=1} |F(h)| \geq |F(f)| = \left|\int_E fg\right|$$

$$= \left|\int_E (\frac{1}{m(A)}\chi_A \operatorname{sgn} g)g\right| = \frac{1}{m(A)}\int_A |g| \geq ||F|| + \varepsilon,$$

um absurdo.

□

O próximo teorema diz que se $1 \leq p < \infty$ então todo funcional linear limitado em $L^p([a,b])$ é da forma (5.35). Ele também é válido para $L^p(E)$, mas a demonstração utiliza resultados mais avançados da teoria da medida e integração.

Antes de enunciá-lo vamos demonstrar dois lemas.

Lema 5.36 *Sejam E um conjunto de medida finita e $g \in L^1(E)$. Sejam $1 \leq p < \infty$ e q seu expoente conjugado. Suponha que exista $M > 0$ tal que $|\int_E g\varphi| \leq M||\varphi||_p$ para toda função simples em E. Então $g \in L^q(E)$.*

Demonstração: Mostremos que a hipótese de que $|\int_E g\varphi| \leq M||\varphi||_p$ para toda função simples em E implica que $\int_E |g\varphi| \leq M||\varphi||_p$ para toda função simples em E

De fato, dada a função simples ψ defina a também função simples $\eta = \operatorname{sgn} g|\psi|$. Temos

$$\int |g\psi| = \int |g||\psi| = \left|\int |g||\psi|\right| = \left|\int g \operatorname{sgn} g|\psi|\right| = \left|\int g\eta\right|$$

$$\leq M||\eta||_p = M\left(\int |\eta|^p\right)^{1/p} = M\left(\int |\operatorname{sgn} g|\psi||^p\right)^{1/p}$$

$$\leq M\left(\int |\psi|^p\right)^{1/p} = M||\psi||_p.$$

Note que se φ é simples então $\varphi \in L^p(E)$, pois E tem medida finita. De fato, se $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ está na forma normal então

$$||\varphi||_p^p = \int_E |\sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}|^p = \int_E \sum_{k=1}^n |a_k|^p \chi_{A_k}$$

$$\leq \max\{|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p\} \int_E \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} = \max\{|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p\} m(E) < \infty.$$

Suponha que $p > 1$. Logo, q é finito.

Seja ψ_n uma sequência crescente de funções simples não negativas tal que $\psi_n \nearrow |g|^q$. Note que $\psi_n(x) = 0$ quando $g(x) = 0$.

Coloque $\varphi_n = \psi_n^{1/p} \operatorname{sgn} g$ e observe que também vale

$$\psi_n^{1/p} = \varphi_n \operatorname{sgn} g = |\varphi_n \operatorname{sgn} g|$$

Assim, φ_n é simples e

$$||\varphi_n||_p = \left(\int_E \psi_n | \operatorname{sgn} g| \right)^{1/p} = \left(\int_E \psi_n \right)^{1/p}.$$

Também

$$0 \leq \int_E \psi_n = \int \psi_n^{1/p} \psi_n^{1/q} = \int_E |\varphi_n \operatorname{sgn} g| \psi_n^{1/q} \leq \int_E |\varphi_n \operatorname{sgn} g||g|$$

$$= \int_E |\varphi_n |g| \operatorname{sgn} g| = \int |\varphi_n g| \leq M ||\varphi_n||_p = M \left(\int_E \psi_n \right)^{1/p}.$$

Se $\int_E \psi_n = 0$ então $\int_E \psi_n \leq M^q$ e se $\int_E \psi_n \neq 0$

$$\left(\int_E \psi_n \right)^{1/q} = \left(\int_E \psi_n \right)^{1-1/p} = \int_E \psi_n \left(\int_E \psi_n \right)^{-1/p}$$

$$\leq M \left(\int_E \psi_n \right)^{1/p} \left(\int_E \psi_n \right)^{-1/p} = M,$$

ou seja, $\int_E \psi_n \leq M^q$.

Segue do Teorema da Convergência monótona que $\int_E |g|^q \leq M^q$, isto é, $||g||_q \leq M$. Assim, $g \in L^q(E)$.

Suponha agora que $p = 1$. Logo, $q = \infty$. Seja $F = \{x \in E; |g(x)| > M\}$. Se F tem medida positiva, colocando

$$\varphi = \frac{1}{m(F)}\chi_F \operatorname{sgn} g$$

vemos que φ é simples e como $g \neq 0$ em F,

$$||\varphi||_1 = \int_E |\frac{1}{m(F)}\chi_F \operatorname{sgn} g| = \int_E \frac{1}{m(F)}\chi_F = 1.$$

Mas

$$M = M||\varphi||_1 \geq |\int_E g\varphi| = \left|\int_E (\frac{1}{m(F)}\chi_F \operatorname{sgn} g)g\right|$$
$$= \frac{1}{m(F)}\int_F |g| = M + \frac{1}{m(F)}\int_F (|g| - M) > M$$

pois $|g| - M > 0$ no conjunto de medida positiva F. Uma contradição. Logo $m(F) = 0$ e, portanto, $||g||_\infty \leq M$.

□

Lema 5.37 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mensurável e limitada, digamos, $|f| \leq K$ para algum $K > 0$. Então existe uma sequência de funções escadas $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo $|g_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que converge para f quase sempre.*

Demonstração: Pela Proposição 2.30 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função escada $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo $|g_n| \leq K$ e

$$m(\{x \in [a,b]; |f(x) - g_n(x)| \geq 2^{-n}\}) < 2^{-n}.$$

Coloque $E_n = \{x \in [a,b]; |f(x) - g_n(x)| \geq 2^{-n}\}$, $F_m = \cup_{n \geq m} E_n$ e $F = \cap_{m \geq 1} F_m$.

Temos $m(F_m) \leq \sum_{n \geq m} m(E_n) \leq \sum_{n \geq m} 2^{-n} = 2^{1-m}$ e, portanto, $m(F) \leq 2^{1-m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, consequentemente, $m(F) = 0$.

Agora, se $x \notin F$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin F_m$. Assim, $x \notin E_n$ para todo $n \geq m$. Portanto, $|f(x) - g_n(x)| < 2^{-n}$ todo $n \geq m$. Segue que g_n converge para f em $[a,b] \setminus F$.

□

Teorema 5.38 (Teorema de representação de Riesz) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e q seu expoente conjugado.*

Se $F \in L^p([a,b])^*$ então existe uma única $g \in L^q([a,b])$ tal que

$$F(f) = \int_{[a,b]} fg, \quad \forall f \in L^p([a,b]). \tag{5.39}$$

Além do mais, $||F|| = ||g||_q$.

Demonstração:

Unicidade:

Se $g_1, g_2 \in L^q([a,b])$ são tais que $F(f) = \int_{[a,b]} fg_1 = \int_{[a,b]} fg_2$ para toda $f \in L^p([a,b])$ então $0 = \int_{[a,b]} f(g_1 - g_2)$ para toda $f \in L^p([a,b])$. Pela Proposição 5.34 temos $0 = ||0|| = ||g_1 - g_2||_q$, ou seja, $g_1 = g_2$.

Existência:

Se $F = 0$ basta tomar $g = 0$. Suponha $F \neq 0$.

Para cada $s \in [a,b]$, como $\chi_s \doteq \chi_{[a,s]} \in L^p([a,b])$, defina $\varphi(s) = F(\chi_s)$.

Se $(s_i, s_i') \in [a,b]$, $i \in \mathbb{N}$, são intervalos abertos dois a dois disjuntos, defina para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} (\chi_{s_i'} - \chi_{s_i}) \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i)) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i, s_i']} \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i)).$$

Toda função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mensurável e limitada pertence a $L^p([a,b])$. De fato,

$$||h||_p^p = \int_{[a,b]} |h|^p \leq ||h||_\infty^p (b-a) < \infty.$$

Note que f_n é simples e, portanto, pertence a $L^p([a,b])$.

Como os intervalos $(s_i, s_i']$ são dois a dois disjuntos, f_n converge pontualmente para

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}(\chi_{s_i'} - \chi_{s_i}) \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{(s_i,s_i']} \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i))$$

e, portanto, $|f_n - f|^p$ converge pontualmente a zero.

Também

$$|f_n|^p = |\sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,s_i']} \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i))|^p$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,s_i']} |\operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i))|\right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,s_i']}\right)^p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,s_i']} \leq 1 \in L^p([a,b]). \tag{5.40}$$

Logo,

$$|f|^p = \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \leq 1.$$

Assim,

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p \in L^1([a,b]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$||f_n - f||_p^p = \int_{[a,b]} |f_n - f|^p \to 0,$$

ou seja, f_n converge a f em $L^p([a,b])$.

Em particular, $||f_n||_p$ converge para $||f||_p$ pois $|\,||f_n||_p - ||f||_p| \leq ||f_n - f||_p$.

Como F é linear,

$$F(f_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i))(F(\chi_{s_i'}) - F(\chi_{s_i}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\varphi(s_i') - \varphi(s_i))(\varphi(s_i') - \varphi(s_i)) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(s_i') - \varphi(s_i)|.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(s_i') - \varphi(s_i)| \leq ||F||\,||f_n||_p.$$

Como F é contínuo em $L^p([a,b])$ e f_n converge para f em $L^p([a,b])$ temos

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(s_i') - \varphi(s_i)| \leq ||F||\,||f||_p. \tag{5.41}$$

Por (5.40) temos $|f_n|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,s_i']}$ e daí

$$||f_n||_p^p = \int_{[a,b]} |f_n|^p \leq \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,s_i']} = \sum_{i=1}^{n} \ell((s_i,s_i')) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell((s_i,s_i'))$$

e consequentemente, por $||f_n||_p$ convergir a $||f||_p$, temos

$$||f||_p^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell((s_i,s_i')) \tag{5.42}$$

De (5.41) e (5.42) chegamos a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(s_i') - \varphi(s_i)| \leq ||F|| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \ell((s_i,s_i')) \right)^{1/p}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = (\varepsilon/||F||)^p$ e daí, se $\sum_{i=1}^{\infty} \ell((s_i,s_i')) < \delta$ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(s_i') - \varphi(s_i)| \leq ||F||(\sum_{i=1}^{\infty} \ell((s_i,s_i')))^{1/p} < ||F||\delta^{1/p} = \varepsilon.$$

Portanto, φ é absolutamente contínua em $[a,b]$. Note que $\varphi(a) = F(\chi_{[a,a]}) = 0$ pois $\chi_{[a,a]}$ é zero quase sempre.

Pelo Teorema 4.34 $g \doteq \varphi' \in L^1([a,b])$ e

$$\varphi(s) = \int_a^s g = \int_{[a,b]} g\chi_{[a,s]} = \int_{[a,b]} g\chi_s,$$

isto é,

$$F(\chi_{[a,s]}) = \int_{[a,b]} g\chi_{[a,s]}.$$

Toda função escada em $[a,b]$ pode ser escrita, a menos de um número finito de pontos, como

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{[a,s_j]}.$$

Temos

$$F(\psi) = F(\sum_{j=1}^{k} a_j\chi_{[a,s_j]}) = \sum_{j=1}^{k} a_j F(\chi_{[a,s_j]}) = \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{[a,b]} g\chi_{[a,s_j]}$$

$$= \int_{[a,b]} g \sum_{j=1}^{k} a_j\chi_{[a,s_j]} = \int_{[a,b]} g\psi.$$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada; temos $||f||_\infty \leq K$ para algum $K > 0$. Pelo Lema 5.37 existe uma sequência de funções escadas $\psi_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $|\psi_k| \leq K$, que converge para f quase sempre.

Considere $f_k = |f - \psi_k|^p$. Temos que f_k converge a zero quase sempre e $|f_k| \leq (2K)^p \in L^1([a,b])$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{k\to\infty} ||f - \psi_k||_p = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{[a,b]} |f - \psi_k|^p \right)^{1/p} = \left(\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} |f - \psi_k|^p \right)^{1/p} = 0,$$

ou seja, f_k converge para f em $L^p([a,b])$.

Como F é contínuo

$$F(f) = \lim_{k\to\infty} F(\psi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} g\psi_k.$$

Como

$$|g\psi_k| \leq K|g| \in L^1([a,b]) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} g\psi_k = gf \quad \text{q. s.},$$

aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$F(f) = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} g\psi_k = \int_{[a,b]} gf$$

para toda f mensurável e limitada.

Como F é contínuo,

$$\left| \int_{[a,b]} gf \right| = |F(f)| \leq ||F||\, ||f||_p$$

para toda f mensurável e limitada; em particular para funções simples em $[a,b]$. Como $g \in L^1([a,b])$ podemos utilizar o Lema 5.36 e concluir que $g \in L^q([a,b])$.

Tome agora $f \in L^p([a,b])$, $f \geq 0$.

Defina para cada $n \in \mathbb{N}$ $f_n = \min\{f, n\}$. Temos que f_n é mensurável, f_n converge para f, $|f_n| = f_n \leq n$ e $|f_n| = f_n \leq f$. Assim, $|f_n - f|^p$ tende a zero e $|f_n - f|^p \leq (2f)^p \in L^1([a,b])$. Segue do Teorema da Convergência Dominada que f_n converge para f em $L^p([a,b])$.

Pela continuidade de F e por f_n ser uma função mensurável limitada, obtemos

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} gf_n.$$

Mas

$$|gf_n| = |g|\,|f_n| \leq |g|\,|f| = |fg| \in L^1([a,b])$$

pela desigualdade de Hölder ($f \in L^p([a,b])$ e $g \in L^q([a,b])$) e gf_n tende a gf. Nova aplicação do Teorema da Convergência Dominada leva a

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} gf_n = \int_{[a,b]} gf.$$

Finalmente, se $f \in L^p([a,b])$ escreva $f = f^+ - f^-$. Como $0 \leq (f^\pm)^p \leq |f|^p \in L^1([a,b])$ temos $f^\pm \in L^p([a,b])$ e, assim,

$$F(f) = F(f^+ - f^-) = F(f^+) - F(f^-)$$

$$= \int_{[a,b]} gf^+ - \int_{[a,b]} gf^- = \int_{[a,b]} g(f^+ - f^-) = \int_{[a,b]} gf.$$

Assim, fica demonstrado que existe $g \in L^q([a,b])$ tal que para toda $f \in L^p([a,b])$ temos

$$F(f) = \int_{[a,b]} gf.$$

Segue da Proposição 5.34 que $||F|| = ||g||_q$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[F] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications,* 2^a edição, John Wiley & Sons, Inc, 1999.

[R] Royden, H. L., *Real Analysis,* 2^a edição, The Macmillan Company, New York, 1968.

[WZ] Wheede, R. L. and Zygmund, A., *Measure and Integra – An Introduction to Real Analysis,* 2^a edição, CRC Press, 2015.

Índice Remissivo