Introdução à análise funcional
SMA0120

Sérgio Luís Zani
SMA – ICMC – USP

6 de dezembro de 2021

Sumário

Capítulo 1

Espaços de Banach

Estas notas de aula são baseadas no livro *Introductory Functional Analysis with Applications*, de E. Kreyszig, Wiley Classics Library Edition – 1989.

1.1 Definição, exemplos, propriedades e o teorema do completamento

Definição 1.1 *Sejam X um conjunto e $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Suponha que $+$ seja uma operação binária em X chamada de adição, isto é, uma função que a cada par de elementos $(x, y) \in X \times X$ associe o elemento soma $x + y \in X$. Suponha também que $\mathbb{K}$ aja em X através do que chamaremos multiplicação por escalar, isto é, uma função que a cada par $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$ associe o elemento $\lambda x \in X$.*

Diremos que X com a adição e multiplicação por escalar acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

(EV1) $x + y = y + x, \forall x, y \in X$;

(EV2) $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in X$;

(EV3) $\exists 0 \in X$ *tal que* $0 + x = x, \forall x \in X$;

(EV4) $\forall x \in X, \exists y \in X$ *tal que* $x + y = 0$;

(EV5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

(EV6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

(EV7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$;

(EV8) $1x = x, \forall x \in X$.

Definição 1.2 *Uma norma em um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$ é uma função $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ satisfazendo*

(N1) $||x|| = 0$ *se e somente se* $x = 0$ *(não degenerescência);*

(N2) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ *(homogeneidade);*

(N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall x, y \in X$ *(desigualdade triangular).*

Definição 1.3 *Um espaço vetorial normado (EVN) é um par $(X, ||\cdot||)$ sendo X um espaço vetorial e $||\cdot||$ uma norma em X. Às vezes escrevemos apenas X para representar o EVN.*

Algumas observações e definições sobre um EVN $(X, ||\cdot||)$:

- $(X, ||\cdot||)$ será visto como um espaço métrico com a métrica induzida pela norma, isto é, $d(x, y) = ||x - y||$.
- Segue da desigualdade $|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||$ que a norma é uma função lipschitziana.

Definição 1.4 *Sejam $(X, ||\cdot||)$ um EVN e M um subconjunto de X. Dizemos que que M é limitado se existir $C > 0$ tal que $||x|| \leq C$ para todo $x \in M$.*

Definição 1.5 *Sejam $(X, ||\cdot||)_1$ e $(X, ||\cdot||_2)$. Dizemos que as normas $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ são equivalentes se existirem constantes $c, C > 0$ tais que $c||\,x\,||_1 \leq ||\,x\,||_2 \leq C||\,x\,||_1$ para todo $x \in X$.*

Note que no caso das normas serem equivalentes, as métricas induzidas também são. Neste caso, as topologias induzidas por estas normas coincidem.

Mais ainda, se $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ são equivalentes então qualquer subconjunto M de X é limitado com relação a $||\cdot||_1$ se e somente se for limitado com relação a $||\cdot||_2$.

Definição 1.6 *Uma sequência (x_n) de elementos de X é uma sequência de Cauchy se para cada $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq n_0$.*

Definição 1.7 *Uma sequência (x_n) de elementos de X converge em X se existir $x \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x|| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Usaremos as notações $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \to x$.*

- Se $x_n \to x$ então (x_n) é sequência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x|| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Assim, se $m, n \geq n_0$ temos $||x_m - x_n|| \leq ||x_m - x|| + ||x - x_n|| < \varepsilon$.

Definição 1.8 *Um espaço vetorial normado é um espaço de Banach se for um espaço métrico completo com relação à métrica induzida pela sua norma, isto é, se toda sequência de Cauchy em X convergir para um elemento de X.*

Exemplo 1.9 $\mathbb{R}$ *com $||x|| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, é um espaço de Banach. Um roteiro para demonstrar é o seguinte:*

1. *Toda sequência de números reais possui subsequência monótona;*
2. *toda sequência de Cauchy é limitada;*
3. *toda sequência de Cauchy de números reais possui subsequência que é monótona e limitada;*
4. *toda sequência de números reais que é monótona e limitada é convergente (aqui usa supremo);*
5. *toda sequência de Cauchy que possui subsequência convergente é convergente.*

Observação 1.10 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X então $(||x_n||)$ converge em $\mathbb{R}$. De fato,*

$$| \, ||x_n|| - ||x_m|| \, | \leq ||x_n - x_m|| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

e como $\mathbb{R}$ é completo, $(||x_n||)$ converge.

Exemplo 1.11 $\mathbb{C}$ *munido $||z|| = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ é um espaço de Banach.*

Um roteiro para demonstrar é o seguinte:

1. $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq ||z||$;
2. *se (z_n) é sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$ então $\operatorname{Re} z_n$ e $\operatorname{Im} z_n$ são sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$;*
3. *(z_n) converge para $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$.*

Exemplo 1.12 $\mathbb{K}^n$ *com $||x = (x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ é um espaço de Banach. A demonstração é muito parecida com a do exemplo anterior.*

Exemplo 1.13 *Seja $1 \leq p < \infty$. Defina*

$$\ell^p(\mathbb{K}) \doteq \ell^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}; ||x||_p \doteq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Temos que $\ell^p(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial (operações usuais), $||\cdot||_p$ é uma norma e $(\ell^p(\mathbb{K}), ||\cdot||_p)$ é um espaço de Banach.

De fato, sejam $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^p(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Como

$$|x_n + \lambda y_n|^p \leq (|x_n| + |\lambda y_n|)^p \leq (2 \max\{|x_n|, |\lambda||y_n|\})^p$$

$$= 2^p \max\{|x_n|^p, |\lambda|^p |y_n|^p\} \leq 2^p(|x_n|^p + |\lambda|^p |y_n|^p)$$

obtemos

$$||x+\lambda y||_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + \lambda y_n|^p \leq 2^p(||x||_p^p + |\lambda|^p ||y||_p^p) < \infty.$$

Portanto, $\ell^p(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial.

Vejamos que $||\cdot||_p$ define uma norma.

- $||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} = 0$ *se e somente se cada termo desta série de termos não negativos for igual a zero, ou seja, se e somente se $x = 0$.*
- $||\lambda x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, ||x||_p.$

Se $p = 1$ então como $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$ é imediato que

$$||x+y||_1 \leq ||x||_1 + ||y||_1.$$

Agora, para mostrar a desigualdade triangular para $1 < p < \infty$ vamos precisar do seguinte

Lema 1.14 *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ e $0 < \lambda < 1$. Então*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \tag{1.15}$$

com a igualdade valendo se e somente se $\alpha = \beta$.

Demonstração:

Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ a equação (1.15) é trivial; além do mais, se vale a igualdade, digamos, com $\alpha = 0$ então $0 = (1-\lambda)\beta$, ou seja, $\beta = 0 = \alpha$.

Suponha que $\alpha, \beta > 0$.

Defina $\varphi(t) = 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda$, $t > 0$. Temos

$$\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1}) \begin{cases} < 0 \text{ se } 0 < t < 1 \\ = 0 \text{ se } t = 1 \\ > 0 \text{ se } 1 < t \end{cases} .$$

Logo, $t = 1$ é ponto de mínimo global de φ, $\varphi(1) = 0$ e $\varphi(t) = 0$ se e somente se $t = 1$.

Assim, $0 \leq \varphi(\alpha/\beta)$ e $\varphi(\alpha/\beta) = 0$ se e somente se $\alpha = \beta$.

Mas,

$$0 \leq \varphi(\alpha/\beta) \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda} \leq 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

e

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha/\beta) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda} = 1 - \lambda + \lambda\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$

$\square$

Mostremos agora a desigualdade triangular para o caso em que $p \in (1, \infty)$. Para $p \in (1, \infty)$ defina $q = p/(p-1)$, isto é, $1/p + 1/q = 1$. Note que $q \in (1, \infty)$.

Sejam $x = (x_n) \in \ell^p(\mathbb{K})$ e $y = (y_n) \in \ell^q(\mathbb{K})$.

Pelo lema acima com $\lambda = 1/p$, $\alpha = |x_n|^p$ e $\beta = |y_n|^q$, observando que $1 - \lambda = 1/q$, temos

$$|x_n y_n| = (|x_n|^p)^{1/p}(|y_n|^q)^{1/q} = \alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta = \frac{1}{p}|x_n|^p + \frac{1}{q}|y_n|^q,$$

logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q = \frac{1}{p}||x||_p^p + \frac{1}{q}||y||_q^q < \infty,$$

ou seja, $(x_n y_n) \in \ell^1(\mathbb{K})$.

Suponha que $x, y \neq 0$ e coloque $\widetilde{x} = x/||x||_p = (\widetilde{x}_n)$ e $\widetilde{y} = y/||y||_q = (\widetilde{y}_n)$.

Assim $||\widetilde{x}||_p = ||\widetilde{y}||_q = 1$ e pelo que mostramos acima,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\widetilde{x}_n\widetilde{y}_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{||x||_p}\frac{y_n}{||y||_q}\right| \leq \frac{1}{p}||\widetilde{x}||_p^p + \frac{1}{q}||\widetilde{y}||_q^q = 1,$$

isto é, vale a seguinte desigualdade (de Hölder para sequências)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq ||x||_p ||y||_q \tag{1.16}$$

Note que a desigualdade (1.16) *vale mesmo se* $x = 0$ *ou se* $y = 0$. *Além do mais, sob a convenção* $0 \cdot \infty = 0$, *ela também é válida se* $||x||_p = \infty$ *ou* $||y||_q = \infty$.

Estamos aptos a mostrar a desigualdade triangular. Sejam $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^p(\mathbb{K})$. *Podemos supor que* $x + y \neq 0$.

$$||x+y||_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} |x_n + y_n|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} [|x_n| + |y_n|] = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} |y_n|$$

$$\overset{\text{Hölder, } p=(p-1)q}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \\ + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}$$

$$= ||x||_p ||x+y||_p^{p/q} + ||y||_p ||x+y||_p^{p/q} = (||x||_p + ||y||_p) ||x+y||_p^{p/q},$$

ou seja,

$$||x+y||_p^p \leq (||x||_p + ||y||_p) ||x+y||_p^{p/q}$$

e como, $x + y \neq 0$,

$$||x+y||_p = ||x+y||_p^{p-p/q} \leq ||x||_p + ||y||_p.$$

A desigualdade acima é chamada de desigualdade de Minkowski.

Mostremos agora que $\ell^p(\mathbb{K})$ *com a norma acima é um espaço de Banach.*

Seja (x_n) *uma sequência de Cauchy em* $\ell^p(\mathbb{K})$.

Coloque $x_n = (x_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ *com* $x_j^{(n)} \in \mathbb{K}$, $j, n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n, m \geq n_0$ *então para todo* $j \in \mathbb{N}$ *temos*

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| = \left(|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p\right)^{1/p}$$
$$= ||x_n - x_m||_p \leq \varepsilon.$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, $(x_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{K}$*, logo, converge para algum* $y_j \in \mathbb{K}$.

Defina $y = (y_j)$. *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ *temos*

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \leq ||x_n - x_m||_p^p < \varepsilon^p, \quad \text{para todos } n, m \geq n_0.$$

Logo, para todos $k \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq n_0$,

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - y_j|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p.$$

Segue que

$$||x_n - y||_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - y_j|^p = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - y_j|^p \leq \varepsilon^p,$$

isto é $||x_n - y||_p < \varepsilon$ *se* $n \geq n_0$. *Como* $x_n - y$ *e* x_n *estão em* $\ell^p(\mathbb{K})$ *segue que* $y = x_n - (x_n - y) \in \ell^p(\mathbb{K})$.

Portanto, (x_n) *converge para* y *em* $\ell^p(\mathbb{K})$. *Isto mostra que este espaço é completo.*

Exercício 1.17 *Seja*

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) \doteq \ell^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}; \exists C > 0 \text{ tal que } |x_n| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Ou seja, $\ell^\infty(\mathbb{K})$ *é o espaço vetorial (operações usuais) das sequências limitadas. Defina*

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad x \in \ell^\infty(\mathbb{K}).$$

Mostre que isto define uma norma (norma do supremo) e que $\ell^\infty(\mathbb{K})$ *com esta norma é um espaço de Banach.*

Exemplo 1.18 *Sejam*

$$C([a,b];\mathbb{K}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K}; f \text{ é contínua}\} \quad e \quad ||f||_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

Claramente $||\cdot||_\infty$ *define uma norma no espaço vetorial* $C([a,b];\mathbb{K})$.

Mostremos que este espaço é de Banach.

Seja (f_n) *uma sequência de Cauchy. Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* N *tal que se* $n, m \ge N$ *e para todo* $x \in [a,b]$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \sup_{a \le t \le b} |f_m(t) - f_n(t)| = ||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon/3. \tag{1.19}$$

Ou seja, para todo $x \in [a,b]$ $(f_n(x))$ *é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{K}$ *e, portanto, convergente.*

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *dada por* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Segue de* (1.19) *que para todo* $m \ge N$ *temos* $|f_m(x) - f(x)| \le \varepsilon/3$ *para todo* $x \in [a,b]$ *e, portanto,* $||f_m - f||_\infty \le \varepsilon/3$ *para todo* $m \ge N$.

Para concluir resta mostrarmos que f *é contínua.*

Seja $x_0 \in [a,b]$. *Como* f_N *é contínua, existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ *temos* $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ *e, portanto,*

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

$$\le 2||f - f_N||_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.20 *Seja* $X = C([0,1];\mathbb{R})$. *Para cada* $f \in X$ *defina* $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. *É fácil ver que* $||\cdot||_1$ *define uma norma em* X. *Para ver que se* $||f||_1 = 0$ *então* $f = 0$ *note que se* $f(t_0) \ne 0$ *para algum* $t_0 \in [0,1]$ *então pela continuidade de* f *em* t_0, *existem* α, β, $\alpha < \beta$, *tais que* $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ *e* $|f(t)| \ge |f(t_0)|/2 > 0$, *para todo* $t \in [\alpha, \beta]$. *Segue que*

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \ge \int_\alpha^\beta |f(t)|\, dt \ge |f(t_0)|(\beta - \alpha)/2 > 0,$$

uma contradição.

O espaço vetorial $(X, ||\cdot||_1)$ *não é um espaço de Banach. De fato, defina* $f_m \in X$, $m \geq 2$, *por*

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ m(t - 1/2), & 1/2 \leq t \leq 1/2 + 1/m \\ 1, & 1/2 + 1/m \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Note que $0 \leq f_n \leq 1$.

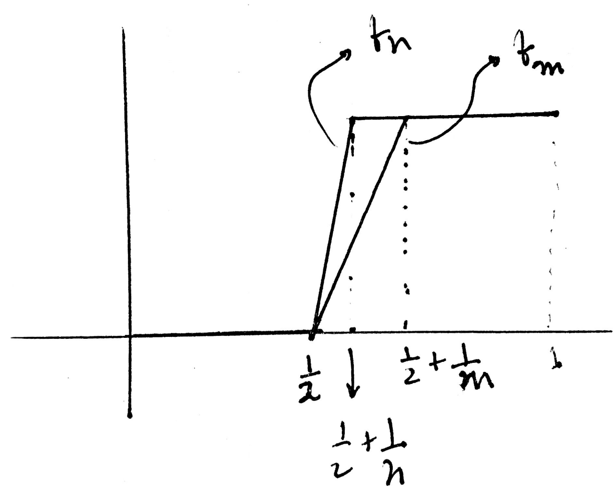

Figura 1.1: Esboço dos gráficos de f_n e f_m com $n > m$

Se $n \geq m \geq 2$ *temos*

$$||f_n - f_m||_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt = \int_{1/2}^{1/2+1/m} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt$$

$$\leq \int_{1/2}^{1/2+1/m} 2dt = 2/m.$$

Portanto, (f_m) é sequência de Cauchy.

Suponha que (f_m) convirja em X para alguma função $f \in X$. Temos

$$||f - f_m||_1 = \int_0^1 |f(t) - f_m(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2} |f(t)|\, dt + \int_{1/2}^{1/2+1/m} |f(t) - f_m(t)|\, dt + \int_{1/2+1/m}^{1} |1 - f(t)|\, dt.$$

Como cada parcela acima é não negativa, temos

$$\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt, \int_{1/2}^{1/2+1/m} |f(t) - f_m(t)|\, dt, \int_{1/2+1/m}^{1} |1 - f(t)|\, dt$$

$$\leq ||f - f_m||_1 \to 0$$

segue que

- $\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt = 0$, *ou seja,* $f(t) = 0$ *se* $t \in [0, 1/2]$;

- $0 \leq \int_{1/2}^{1/2+1/m} |f(t) - f_m(t)|\, dt \leq (1 + ||f||_\infty)/m \to 0$ *(f é limitada em $[0, 1]$ por ser contínua);*

- *tomando $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2} + \frac{1}{m_0} < c$, temos para todo $m \geq m_0$ que $f_m(t) = 1$ para $t \in [c, 1]$ e, portanto,*

$$\int_c^1 |1 - f(t)|\, dt = \int_c^1 |f_m(t) - f(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f_m(t) - f(t)|\, dt = ||f_m - f||_1 \to 0.$$

Logo, $f(t) = 1$ se $t \in [c, 1]$ para todo $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, isto é, $f(t) = 1$ se $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ Portanto, $\lim_{t \to \frac{1}{2}+} f(t) = 1 \neq f(\frac{1}{2}) = 0$. Um absurdo.

Proposição 1.21 *Sejam $(X, ||\cdot||)$ um espaço vetorial normado e $Y \subset X$ um subespaço vetorial. O fecho $\overline{Y}$ de Y em X é um subespaço vetorial de X.*

Demonstração:

Sejam $x, y \in \overline{Y}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Existem sequências (x_n) e (y_n) de Y que convergem em X para x e y, respectivamente. Como $z_n = \alpha x_n + \beta y_n \in Y$ e

$$||z_n - (\alpha x + \beta y)|| = ||\alpha(x_n - x) + \beta(y_n - y)|| \leq |\alpha|||x_n - x|| + |\beta|||y_n - y|| \to 0,$$

segue que $\alpha x + \beta y \in \overline{Y}$.

□

Teorema 1.22 *Sejam $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach e Y um subespaço vetorial de X. A fim de que Y seja um espaço de Banach (com a métrica herdada de X) é necessário e suficiente que Y seja fechado.*

Demonstração:

Suponha que Y seja um espaço de Banach. Sejam $y \in \overline{Y}$ e $y_n \in Y$ tal que $y_n \to y$. Como (y_n) é sequência de Cauchy em Y, que é um espaço de Banach, existe $x \in Y$ tal que $y_n \to x$. Pela unicidade do limite, $y = x \in Y$. Ou seja, $\overline{Y} \subset Y$, logo, $Y = \overline{Y}$.

Reciprocamente, suponha que Y seja fechado. Seja (y_n) uma sequência de Cauchy em Y. Como $Y \subset X$, (y_n) é uma sequência de Cauchy em X, que é um espaço de Banach. Logo, existe $x \in X$ tal que $y_n \to x$. Assim, $x \in \overline{Y} = Y$. Ou seja, (y_n) converge em Y.

□

Exemplo 1.23 *Seja $\mathfrak{c}(\mathbb{K}) \doteq \mathfrak{c} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}; \exists \lim_{n\to\infty} x_n\}$. Note que $\mathfrak{c}(\mathbb{K})$ é um subespaço vetorial de $\ell^\infty(\mathbb{K})$. Considerando em $\mathfrak{c}(\mathbb{K})$ a norma do supremo, $\mathfrak{c}(\mathbb{K})$ também é um espaço de Banach.*

De fato, pelo Teorema 1.22 basta mostrarmos que $\mathfrak{c}(\mathbb{K})$ é fechado em $\ell^\infty(\mathbb{K})$.

Seja $x = (x_j) \in \overline{\mathfrak{c}(\mathbb{K})}$, o fecho de $\mathfrak{c}(\mathbb{K})$. Existe uma sequência de elementos $u_n = (x_j^{(n)}) \in \mathfrak{c}(\mathbb{K})$ que converge para x em $\ell^\infty(\mathbb{K})$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|x_j^{(n)} - x_j| \leq ||u_n - x||_\infty < \varepsilon/3$ para todos $n \geq N$ e $j \geq 1$.

Como $u_N = (x_j^{(N)}) \in \mathfrak{c}(\mathbb{K})$, ela é uma sequência convergente; logo, uma sequência de Cauchy. Portanto, existe j_0 tal que $|x_j^{(N)} - x_i^{(N)}| < \varepsilon/3$ se $i, j \geq j_0$.

Assim, para $i, j \geq j_0$ temos

$$|x_j - x_i| \leq |x_j - x_j^{(N)}| + |x_j^{(N)} - x_i^{(N)}| + |x_i^{(N)} - x_i| < \varepsilon.$$

Logo, $x = (x_j)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, portanto, convergente. Ou seja, $x \in \mathfrak{c}(\mathbb{K})$. Isto mostra que $\mathfrak{c}(\mathbb{K})$ é fechado em $\ell^\infty(\mathbb{K})$.

Definição 1.24 *Seja X um espaço vetorial normado. Dada uma sequência (x_n) de elementos de X dizemos que a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge em X se a sequência $s_n = \sum_{j=1}^n x_j$ convergir em X.*

Definição 1.25 *Seja X um espaço vetorial normado. Dada uma sequência (x_n) de elementos de X dizemos que a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ é absolutamente convergente em X se série numérica $\sum_{n=1}^\infty ||x_n||$ for convergente em $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.26 *Um espaço vetorial normado X é um espaço de Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em X é convergente em X.*

Demonstração:

Suponha que X seja espaço de Banach. Seja (x_n) uma sequência de elementos de X tal que a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ é absolutamente convergente em X.

Coloque $M = \sum_{n=1}^\infty ||x_n||$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 2$ tal que

$$|M - \sum_{n=1}^{N-1} ||x_n||| = \sum_{n=N}^{\infty} ||x_n|| < \varepsilon.$$

Seja $s_n = \sum_{j=1}^n x_j$. Para todos $n, m \geq N$, $n \geq m$, temos

$$||s_n - s_m|| = ||\sum_{j=m+1}^{n} x_j|| \leq \sum_{j=m+1}^{n} ||x_j|| \leq \sum_{n=N}^{\infty} ||x_n|| < \varepsilon,$$

ou seja, (s_n) é uma sequência de Cauchy em X. Como X é Banach, (s_n) converge em X, isto é, a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge em X.

Reciprocamente, suponha que toda série absolutamente convergente em X seja convergente em X. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X. A estratégia da prova é encontrar uma subsequência de (x_n) que seja convergente. Para isso, buscaremos uma subsequência que tenha como termo geral a soma parcial de uma série que seja absolutamente convergente.

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_1$ então

$$||x_n - x_m|| < 2^{-1}.$$

Indutivamente, suponha que tenhamos $n_1 < \cdots < n_k$ tal que se $n, m \geq n_j$ então

$$||x_n - x_m|| < 2^{-j}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Como (x_n) é de Cauchy existe $n_{k+1} > n_k$ tal que se $n, m \geq n_{k+1}$ então

$$||x_n - x_m|| < 2^{-k-1}.$$

Assim, existe uma sequência estritamente crescente de números naturais n_k satisfazendo

$$||x_n - x_m|| < 2^{-k} \quad \text{para todos } n, m \geq n_k.$$

Defina a sequência (y_k) em X por

$$y_k = \begin{cases} x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, & \text{se } k \geq 2 \\ x_{n_1}, & \text{se } k = 1 \end{cases}.$$

Sejam $t_k = \sum_{j=1}^{k} y_j$ e $s_k = \sum_{j=1}^{k} ||y_j||$.

Note que

$$t_k = \sum_{j=1}^{k} y_j = y_1 + \sum_{j=2}^{k} y_j = x_{n_1} + \sum_{j=2}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) = x_{n_k}. \tag{1.27}$$

Como s_k é crescente, para mostrar que ela é convergente basta mostrar que é limitada. Temos

$$0 \leq s_k = \sum_{j=1}^{k} ||y_j|| = ||y_1|| + \sum_{j=2}^{k} ||y_j||$$

$$= ||x_{n_1}|| + \sum_{j=2}^{k} ||x_{n_j} - x_{n_{j-1}}|| \leq ||x_{n_1}|| + \sum_{j=1}^{k} 2^{-j+1} < ||x_{n_1}|| + 2,$$

vemos que s_k converge em $\mathbb{R}$, isto é, $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ é absolutamente convergente. Por hipótese, $\sum_{j=1}^{\infty} y_j = \lim_{k\to\infty} t_k$ é convergente. Por (1.27), a subsequência (x_{n_k}) converge em X. Seja $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Mostremos que (x_n) converge para x. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ então $||x_n - x_m|| < \varepsilon/2$. Como $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $||x - x_{n_k}|| < \varepsilon/2$ se $k \geq K$. Tome $k \geq K$ tal $n_k \geq N$. Assim, para todo $n \geq N$

$$||x - x_n|| \leq ||x - x_{n_k}|| + ||x_{n_k} - x_n|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto, X é um espaço de Banach.

$\square$

Exemplo 1.28 *Vejamos uma série que é absolutamente convergente, mas que não converge.*

O que faremos é uma adaptação da sequência do Exemplo 1.20 e, a partir dela, construir uma outra sequência que tem como somas parciais a sequência adaptada (usando uma ideia contida na demonstração do teorema anterior).

Considere o EVN do Exemplo 1.20.

Seja $f_m \in X$, $m \geq 2$, dada por

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ m^2(t - 1/2), & 1/2 \leq t \leq 1/2 + 1/m^2 \\ 1, & 1/2 + 1/m^2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

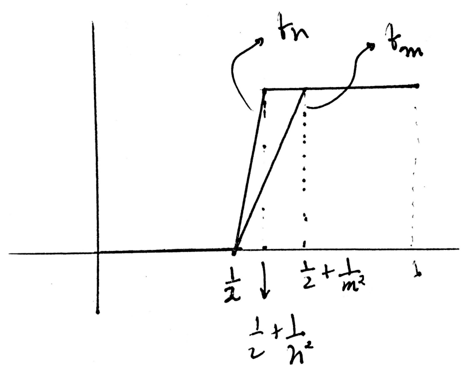

Figura 1.2: Esboço dos gráficos de f_n e f_m com $n > m$

Note que $0 \leq f_n \leq 1$.

Mostremos que (f_m) *não converge. Suponha que* (f_m) *convirja em* X *para alguma função* $f \in X$. *Temos*

$$||f - f_m||_1 = \int_0^1 |f(t) - f_m(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2} |f(t)|\, dt + \int_{1/2}^{1/2+1/m^2} |f(t) - f_m(t)|\, dt + \int_{1/2+1/m^2}^{1} |1 - f(t)|\, dt.$$

Como cada parcela acima é não negativa, temos

$$\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt, \int_{1/2}^{1/2+1/m^2} |f(t) - f_m(t)|\, dt, \int_{1/2+1/m^2}^{1} |1 - f(t)|\, dt$$

$$\leq ||f - f_m||_1 \to 0$$

segue que

- $\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt = 0$, *ou seja,* $f(t) = 0$ *se* $t \in [0, 1/2]$*;*

- $0 \leq \int_{1/2}^{1/2+1/m^2} |f(t) - f_m(t)|\, dt \leq (1 + ||f||_\infty)/m^2 \to 0$ *(*f *é limitada em* $[0, 1]$ *por ser contínua);*

- *tomando* $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ *e* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{2} + \frac{1}{m_0^2} < c$*, temos para todo* $m \geq m_0$ *que* $f_m(t) = 1$ *para* $t \in [c, 1]$ *e, portanto,*

$$\int_c^1 |1 - f(t)|\, dt = \int_c^1 |f_m(t) - f(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f_m(t) - f(t)|\, dt = ||f_m - f||_1 \to 0.$$

Logo, $f(t) = 1$ *se* $t \in [c, 1]$ *para todo* $c \in (\frac{1}{2}, 1)$*, isto é,* $f(t) = 1$ *se* $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ *Portanto,* $\lim_{t \to \frac{1}{2}+} f(t) = 1 \neq f(\frac{1}{2}) = 0$*. Um absurdo.*

Defina $g_2 = f_2$ *e, para* $m \geq 3$*,* $g_m = f_m - f_{m-1}$*.*

Coloque $t_m = \sum_{k=2}^m g_k$ *e* $s_m = \sum_{k=2}^m ||g_k||_1$*.*

Como

$$t_m = \sum_{k=2}^m g_k = g_2 + \sum_{k=3}^m g_k = f_2 + \sum_{k=3}^m (f_k - f_{k-1}) = f_m$$

segue que a série $\sum_{k=2}^\infty g_k$ *não converge.*

PPor outro lado, como $f_k = f_{k-1}$ *em* $[0, 1/2] \cup [1/2 + 1/(k-1)^2, 1]$*, temos*

$$\begin{aligned} 0 \leq s_m = \sum_{k=2}^m ||g_k||_1 &= ||g_2||_1 + \sum_{k=3}^m ||g_k||_1 = ||f_2||_1 + \sum_{k=3}^m ||f_k - f_{k-1}||_1 \\ &= \int_0^1 |f_2(t)|\, dt + \sum_{k=3}^m \int_0^1 |f_k(t) - f_{k-1}(t)|\, dt \\ &= \frac{5}{8} + \sum_{k=3}^m \int_{1/2}^{1/2+1/(k-1)^2} |f_k(t) - f_{k-1}(t)|\, dt \\ &\leq \frac{5}{8} + 2\sum_{k=3}^m \frac{1}{(k-1)^2} \leq \frac{5}{8} + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência crescente (s_m) *é limitada e, portanto, convergente. Portanto,* $\sum_{k=2}^\infty ||g_k||_1$ *converge, isto é,* $\sum_{k=2}^\infty g_k$ *é absolutamente convergente.*

Definição 1.29 *Sejam* $(X_1, ||\cdot||_1)$ *e* $(X_2, ||\cdot||_2)$ *espaços vetoriais normados. Uma função* $A : X_1 \to X_2$ *que satisfaz* $||A(x) - A(y)||_2 = ||x - y||_1$ *para todos* $x, y \in X_1$ *é chamada de imersão isométrica. Se* A *for sobrejetora dizemos que* A *é uma isometria.*

Exercício 1.30 *(a) Toda imersão isométrica é injetora.*

(b) A inversa de uma isometria é também uma isometria.

No contexto de EVN estamos interessados em isometrias (ou imersões isométricas) que sejam lineares. Neste caso, para que $A : X_1 \to X_2$ seja uma imersão isométrica basta que satisfaça $||A(x)||_2 = ||x||_1$ para todo $x \in X_1$.

Definição 1.31 *Sejam* $(X_1, ||\cdot||_1)$ *e* $(X_2, ||\cdot||_2)$ *espaços vetoriais normados. Dizemos que* X_1 *e* X_2 *são isométricos se existir uma isometria linear de* $A : X_1 \to X_2$*, isto é,* A *é uma isometria e satisfaz* $A(x+\lambda y) = A(x) + \lambda A(y)$ *para todos* $x, y \in X_1$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

Exercício 1.32 *Se* $(X_1, ||\cdot||_1)$ *e* $(X_2, ||\cdot||_2)$ *são EVN então*

$$(X_1, ||\cdot||_1) \sim (X_2, ||\cdot||_2) \text{ se e somente se } X_1 \text{ e } X_2 \text{ são isométricos}$$

define uma relação de equivalência no conjunto de todos os EVN.

Teorema 1.33 (Completamento de um EVN) *Seja* $(X, ||\cdot||)$ *um EVN. Então existem*

- *um espaço de Banach* $(\widehat{X}, ||\cdot||^{\widehat{}})$,
- *um subespaço vetorial denso* W *de* $\widehat{X}$ $(\overline{W} = \widehat{X})$ *e*
- *uma isometria linear* $A : X \to W$.

Além do mais, se existirem

- *um espaço de Banach* $(X', ||\cdot||')$,
- *um subespaço vetorial denso* W' *de* X' $(\overline{W'} = X')$ *e*

- *uma isometria linear* $A' : X \to W'$

então $(\widehat{X}, ||\cdot||^{\widehat{}})$ *e* $(X', ||\cdot||')$ *são isométricos.*

Ou seja, $(\widehat{X}, ||\cdot||^{\widehat{}})$ *é único a menos de isometria e será chamado de completamento de* $(X, ||\cdot||)$*;* X *pode ser visto como um subespaço vetorial denso de* $\widehat{X}$*.*

Demonstração:

- *O conjunto* $\widehat{X}$

Seja $\mathscr{C} = \{x = (x_n); x$ é sequência de Cauchy em $X\}$ e defina para $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathscr{C}$ que $x \sim y$ se $||x_n - y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. É claro que isto define uma relação de equivalência em $\mathscr{C}$. Denote a classe de equivalência de $x \in \mathscr{C}$ por $\widehat{x}$.

Defina
$$\widehat{X} = \mathscr{C}/\sim = \{\widehat{x}; x \in \mathscr{C}\}.$$

Note que se $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ são convergentes então $x \sim y$ se e somente se convergem para o mesmo ponto.

- *Adição em* $\widehat{X}$

Dados $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ com $x, y \in \mathscr{C}$ coloque

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y}.$$

Para ver que esta operação está bem definida suponha que $x = (x_n) \sim x' = (x'_n)$ e $y = (y_n) \sim y' = (y'_n)$. Temos

$$||x_n + y_n - (x'_n + y'_n)|| \leq ||x_n - x'_n|| + ||y_n - y'_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ou seja, $x + y = (x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n) = x' + y'$. Portanto,

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y} = \widehat{x'+y'} = \widehat{x'} + \widehat{y'}.$$

- *Multiplicação por escalar em* $\widehat{X}$

Dados $\widehat{x} \in \widehat{X}$ com $x \in \mathscr{C}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ coloque

$$\lambda \widehat{x} = \widehat{\lambda x}.$$

A demonstração de que isto está bem definido é parecida com a que foi feita acima.

- $\widehat{X}$ *munido da adição e multiplicação por escalar acima é espaço vetorial*

A demonstração das oito propriedades que definem um espaço vetorial é bem direta. Vejamos que vale (EV3), deixando as demais como exercício.

Seja 0 a sequência nula. Como 0 é constante, é convergente. Logo, $0 \in \mathscr{C}$. Então, dado $\widehat{x}$ com $x \in \mathscr{C}$, temos

$$\widehat{0} + \widehat{x} = \widehat{0 + x} = \widehat{x}.$$

- *A norma* $|| \cdot ||\,\widehat{}$

Seja $x = (x_n) \in \mathscr{C}$. Como $|||x_n|| - ||x_m||| \leq ||x_n - x_m|| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$ segue que a sequência de números reais $(||x_n||)$ é de Cauchy e, portanto, convergente.

Note que se $(x_n) \sim (y_n)$ então $|||x_n|| - ||y_n||| \leq ||x_n - y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Assim, $(||x_n||)$ e $(||y_n||)$ convergem para o mesmo valor. Desta forma, fica bem definido colocar

$$||\,\widehat{x}\,||\,\widehat{} = \lim_{n\to\infty} ||x_n||$$

se $x = (x_n) \in \mathscr{C}$.

Claramente $||\,\widehat{x}\,||\,\widehat{} \geq 0$ para todo $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Também são imediatas a propriedade de homogeneidade e a desigualdade triangular.

Vejamos que $||\,\widehat{x}\,||\,\widehat{} = 0$ se e somente se $\widehat{x} = \widehat{0}$, sendo $0 = (0)$ a sequência nula. Temos $||\,\widehat{0}\,||\,\widehat{} = \lim_{n\to\infty} ||0|| = 0$. Reciprocamente, se $x = (x_n) \in \mathscr{C}$ é tal que $||\,\widehat{x}\,||\,\widehat{} = 0$ então $||x_n - 0|| = ||x_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ou seja, $\widehat{x} = \widehat{0}$.

- *Isometria linear e o subespaço* W

Dado $x_0 \in X$, a sequência constante (x_0) é convergente e, portanto, pertence a $\mathscr{C}$. Note que se $\widehat{x} \in \widehat{X}$ e se as sequências constantes (x_0) e (x_0') pertencem a $\widehat{x}$ então elas coincidem pois $||x_0 - x_0'|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Assim, podemos definir $A' : X \to \widehat{X}$ por $A'(x_0) = \widehat{(x_0)}$, em que (x_0) representa a sequência tem todos os termos iguais a x_0.

Mostremos que A' é linear. Sejam $x_0, x_0' \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

$$A'(x_0 + \lambda x_0') = \widehat{(x_0 + \lambda x_0')} = \widehat{(x_0) + \lambda (x_0')}$$

$$= \widehat{(x_0)} + \widehat{\lambda (x_0')} = \widehat{(x_0)} + \lambda \widehat{(x_0')} = A'(x_0) + \lambda A'(x_0').$$

Vejamos que A' é uma imersão isométrica. Sejam $x \in X$ e (x) a sequência constante associada. Basta ver que

$$||\, A'(x) \,||^{\widehat{}} = ||\, \widehat{(x)} \,||^{\widehat{}} = \lim_{n\to\infty} ||x|| = ||x||.$$

Seja $W = A'(X)$. Defina $A : X \to W$ por $A(x) = A'(x)$. Como A é sobrejetora, segue que A é uma isometria.

- $\overline{W} = \widehat{X}$

Sejam $\widehat{x} \in \widehat{X}$, $x = (x_n) \in \mathscr{C}$ e $\varepsilon > 0$. Como x é sequência de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_N|| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. Seja x^N a sequência constante (x_N). Note que $\widehat{x^N} = A(x_N) \in W$.

Assim,

$$||\, \widehat{x} - \widehat{x^N} \,||^{\widehat{}} = ||\, \widehat{x - x^N} \,||^{\widehat{}} = \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_N|| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

ou seja, $\widehat{x^N} \in W$ pertence à bola aberta centrada em $\widehat{x}$ de raio ε. Portanto, $\overline{W} = \widehat{X}$.

- $(\widehat{X}, ||\cdot||^{\widehat{}})$ é espaço de Banach

Seja $(\widehat{x_n})$ uma sequência de Cauchy em $\widehat{X}$. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n é uma sequência de Cauchy em X, $x_n = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ com $x_k^{(n)} \in X$, $k \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $||\,\widehat{x_m} - \widehat{x_n}\,||^{\widehat{}} < \varepsilon/3$ se $n, m \geq N_1$.

Como $W = A(X)$ é denso em $\widehat{X}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in X$ tal que $A(z_n) = \widehat{z^{(n)}}$, sendo $z^{(n)}$ a sequência constante $z^{(n)} = (y_k^{(n)})$, com $y_k^{(n)} = z_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$||\,\widehat{x_n} - \widehat{z^{(n)}}\,||^{\widehat{}} < \frac{1}{n}. \tag{1.34}$$

Tome $N \geq N_1$ tal que $N \geq 3/\varepsilon$. Se $n, m \geq N$ então

$$\begin{aligned} ||\,\widehat{z^{(m)}} - \widehat{z^{(n)}}\,||^{\widehat{}} &\leq ||\,\widehat{z^{(m)}} - \widehat{x_m}\,||^{\widehat{}} + ||\,\widehat{x_m} - \widehat{x_n}\,||^{\widehat{}} + ||\,\widehat{x_n} - \widehat{z^{(n)}}\,||^{\widehat{}} \\ &< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(\widehat{z^{(n)}})$ é uma sequência de Cauchy em $W = A(X)$.

Como A^{-1} também é uma isometria e $z_n = A^{-1}(\widehat{z^{(n)}})$ temos que $z \doteq (z_n)$ é uma sequência de Cauchy em X, ou seja, $z \in \mathscr{C}$.

Logo, existe n_1 tal que se $n, m \geq n_1$ então $||z_n - z_m|| < \varepsilon/2$. Segue que

$$||\,\widehat{z^{(n)}} - \widehat{z}\,||^{\widehat{}} = ||\,\widehat{z^{(n)} - z}\,||^{\widehat{}} = \lim_{m\to\infty} ||y_m^{(n)} - z_m|| = \lim_{m\to\infty} ||z_n - z_m|| \leq \varepsilon/2. \tag{1.35}$$

Se $n_0 \geq n_1$ é tal que $n_0 > 2/\varepsilon$ então utilizando (1.34) e (1.35), para todo $n \geq n_0$ temos

$$||\,\widehat{x_n} - \widehat{z}\,||^{\widehat{}} \leq ||\,\widehat{x_n} - \widehat{z^{(n)}}\,||^{\widehat{}} + ||\,\widehat{z^{(n)}} - \widehat{z}\,||^{\widehat{}} < \frac{1}{n} + ||\,\widehat{z^{(n)}} - \widehat{z}\,||^{\widehat{}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $\widehat{x_n}$ é convergente em $\widehat{X}$.

- Unicidade a menos de isometria

Suponha que também tenhamos um espaço de Banach $(X', ||\cdot||')$, um subespaço vetorial denso W' de X' e uma isometria linear $A' : X \to W'$.

Defina $T = A(A')^{-1} : W' \to W$. T é uma isometria linear pois é composta de isometrias lineares $(||\,T(w')\,||^{\widehat{}} = ||\,A(A')^{-1}(w')|\,||^{\widehat{}} = ||(A')^{-1}(w')|| = ||w'||')$.

Dado $x' \in X'$ existe $w'_n \in W'$ tal que $w'_n \to x'$ em X'.

Como $||\, T(w'_n) - T(w'_m)\, ||^{\widehat{}} = ||w'_n - w'_m||'$, temos que $(T(w'_n))$ é sequência de Cauchy em $\widehat{X}$. Logo, $(T(w'_n))$ é convergente. Denote seu limite por $T^*(x')$. Vejamos que este limite independe da sequência (w'_n). De fato, se $v'_n \in W'$ é tal que $v'_n \to x'$ em X' então, argumentando como acima, $(T(v'_n))$ converge e

$$||\, T(v'_n) - T(w'_n)\, ||^{\widehat{}} = ||v'_n - w'_n||' \leq ||v'_n - x'|| + ||x' - w'_n||' \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} T(w'_n) = \lim_{n\to\infty} T(v'_n) = T^*(x')$. Assim, fica bem definida a aplicação $T^* : X' \to \widehat{X}$ dada por $\lim_{n\to\infty} T(w'_n)$ sendo (w'_n) qualquer sequência em W' que convirja para x' em X'. Como T é linear, segue da linearidade do limite que T^* é linear.

Vejamos que T^* é uma isometria.

Sejam $x' \in X'$ e uma sequência (v'_n) em W' convergindo para x' em X'. Temos

$$||\, T^*(x')\, ||^{\widehat{}} = ||\lim_{n\to\infty} T(v'_n)\, ||^{\widehat{}} = \lim_{n\to\infty} ||\, T(v'_n)\, ||^{\widehat{}} = \lim_{n\to\infty} ||v'_n||' = ||x'||'.$$

Ou seja, T^* é uma imersão isométrica.

Mostremos que T^* é sobrejetora. Dado $\widehat{x} \in \widehat{X}$ existe sequência (w_n) em W que converge para $\widehat{x}$ em $\widehat{X}$. Sejam $x_n = A^{-1}(w_n) \in X$ e $w'_n = A'(x_n) \in W'$. Temos

$$||w'_n - w'_m||' = ||A'(x_n) - A'(x_m)||' = ||x_n - x_m||$$

$$= ||A^{-1}(w_n) - A^{-1}(w_m)|| = ||\, w_n - w_m\, ||^{\widehat{}} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

Portanto, (w'_n) é sequência de Cauchy em X' e, consequentemente, converge para algum $x' \in X'$.

Assim,

$$T^*(x') = \lim_{n\to\infty} T(w'_n) = \lim_{n\to\infty} A(A')^{-1}(w'_n) = \lim_{n\to\infty} A(A')^{-1}(A'(x_n))$$

$$= \lim_{n\to\infty} A(x_n) = \lim_{n\to\infty} w_n = \widehat{x}.$$

Portanto, X' e $\widehat{X}$ são isométricos.

$\square$

1.1.1 *Os espaços L^p

Esta subseção não faz parte da ementa desta disciplina e seu conteúdo não será cobrado em listas de exercícios ou avaliações. Optei por colocar este conteúdo extra para ilustrar a utilidade dos do Teoremas 1.26 e 1.33.

Para o entendimento desta seção é necessário um conhecimento da integral de Lebesgue na reta.

Os espaços L^p, $1 \leq p \leq \infty$, que serão descritos aqui formam uma classe importante de espaços de Banach. A demonstração de que estes espaços são completos no caso $1 \leq p < \infty$ é uma aplicação do Teorema 1.26. Lembre que mostramos que ℓ^p, a versão discreta de L^p, é completo de modo direto.

O Exemplo 1.55 é uma aplicação do Teorema do Completamento de EVN (Teorema 1.33). No próximo capítulo, quando estudarmos espaços com produto interno, apresentaremos também um exemplo relacionado a este (Cf. Exemplo 3.20).

Dada uma função mensurável f em E definimos o supremo essencial de $|f|$ em E por

$$\sup\operatorname{ess}_E |f| = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

com a convenção de que $\inf \varnothing = +\infty$.

Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável e $0 < p \leq \infty$ defina

$$||f||_p \doteq ||f||_{p,E} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se} \quad 0 < p < \infty \\ \\ \sup\operatorname{ess}_E |f| & \text{se} \quad p = \infty \end{cases} \in [0, \infty]. \tag{1.36}$$

Para $0 < p \leq \infty$ defina

$$\mathscr{L}^p(E) = \{f : E \to \mathbb{R}; ||f||_p \leq \infty\}.$$

Considere agora a relação equivalência em $\mathscr{L}^p(E)$ dada por $f \sim g$, $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$, se $f = g$ quase sempre.

É claro que se $f \sim g$, $f, g \in L^p(E)$ e $0 < p < \infty$ então $||f||_p = ||g||_p$. Enquanto que se $p = \infty$, temos $m(\{x \in E; f(x) > \alpha\}) = m(\{x \in E; g(x) > \alpha\})$ para todo α e, portanto, $||f||_\infty = ||g||_\infty$.

Dessa forma fica bem definida a quantidade $||[f]||_p \doteq ||f||_p$, $0 < p \leq \infty$, sendo $[f]$ a classe de equivalência de $f \in \mathscr{L}^p(E)$.

Os espaços $L^p(E)$, $0 < p \leq \infty$ são definidos por

$$L^p(E) = \mathscr{L}^p(E)/\sim .$$

Veremos que se $1 \leq p \leq \infty$ então $(L^p(E), ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado e observamos que se $0 < p < 1$ então $L^p(E)$ se torna um espaço (vetorial) métrico com a distância $d_p(f,g) = ||f-g||_p^p$.

A próxima proposição deixa claro o porquê do nome de supremo essencial para $||f||_\infty$ quando $f \in L^\infty(E)$.

Proposição 1.37 *Se $f \in L^\infty(E)$ então $|f| \leq ||f||_\infty$ quase sempre.*

Demonstração: Sejam

$$E_n = \{x \in E; |f(x)| > \frac{1}{n} + ||f||_\infty\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$E_\infty = \{x \in E; |f(x)| > ||f||_\infty\}.]$$

Para mostrar que $|f| \leq ||f||_\infty$ quase sempre, precisamos mostrar que $m(E_\infty) = 0$.

Temos $E_n \subset E_{n+1}$, $\cup_{n=1}^\infty E_n \subset E_\infty$ e se $x \in E_\infty$, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/(|f(x)| - ||f||_\infty)$, vemos que $x \in E_n$. Portanto, $\cup_{n=1}^\infty E_n = E_\infty$ e, consequentemente,

$$m(E_\infty) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Se $m(E_\infty) > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(E_{n_0}) > 0$.

Como

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} < \infty$$

existe $\alpha \in [||f||_\infty, ||f||_\infty + 1/n_0)$ tal que $m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Portanto,

$$0 < m(E_{n_0}) = m(\{x \in E; |f(x)| > \frac{1}{n_0} + ||f||_\infty\})$$

$$\leq m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0,$$

que é um absurdo.

Assim, $m(E_\infty) = 0$.

$\square$

Proposição 1.38 *Se $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável e se $M \geq 0$ é tal que $|f(x)| \leq M$ quase sempre então $f \in L^\infty(E)$, $||f||_\infty \leq M$ e*

$$||f||_\infty = \inf\{K \geq 0; |f| \leq K \textit{ quase sempre}\}.$$

Demonstração: Como $|f(x)| \leq M$ quase sempre,

$$M \in \{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

e, portanto,

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} \leq M$$

Segue que $f \in L^\infty(E)$ e

$$||f||_\infty \leq \inf\{K \geq 0; |f| \leq K \, \text{quase sempre}\}.$$

Pela Proposição 1.37, $||f||_\infty \in \{K \geq 0; |f| \leq K \, \text{quase sempre}\}$, logo,

$$||f||_\infty = \inf\{K \geq 0; |f| \leq K \, \text{quase sempre}\}.$$

$\square$

Corolário 1.39 *$(L^\infty(E), ||\cdot||_\infty)$ é um espaço vetorial normado.*

Demonstração:

Sejam $f, g \in L^\infty(E)$.

Pela Proposição 1.37

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \quad \text{quase sempre}$$

e pela Proposição 1.38

$$||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Assim, $f+g \in L^\infty(E)$ e vale a desigualdade triangular para $||\cdot||_\infty$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ então

$$\sup\operatorname{ess}_E |0f| = \sup\operatorname{ess}_E 0 = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; 0 > \alpha\}) = 0\}$$

$$= \inf\{\alpha \geq 0; m(\varnothing) = 0\} = 0 = 0||f||_\infty.$$

Se $\lambda \neq 0$ então

$$\sup\operatorname{ess}_E |\lambda f| = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |\lambda f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

$$= \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha/|\lambda|\}) = 0\}$$

$$= \inf\{|\lambda|(\alpha/|\lambda|) \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \alpha/|\lambda|\}) = 0\}$$

$$= \inf\{|\lambda|\beta \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \beta\}) = 0\}$$

$$= |\lambda| \inf\{\beta \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > \beta\}) = 0\} = |\lambda|||f||_\infty.$$

Portanto, $\lambda f \in L^\infty(E)$ e valem $||\lambda f||_\infty = |\lambda|||f||_\infty$ e $||0||_\infty = 0$.

Claramente, $||f||_\infty \geq 0$.

Finalmente, se $||f||_\infty = 0$ então pela Proposição 1.37, $|f| \leq 0$ quase sempre. Ou seja, $f = 0$ quase sempre, isto é, a classe $[f]$ é a classe nula.

□

Teorema 1.40 *Se $m(E) < \infty$ e $f \in L^\infty(E)$ então $f \in L^p(E)$ para todo $p > 0$ e*

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Demonstração:

Se $m(E) = 0$ então $||f||_p = ||f||_\infty = 0$ e o teorema está provado.

Suponha que $m(E) > 0$.

Como $|f| \leq ||f||_\infty$ quase sempre, segue que $|f|^p \leq ||f||_\infty^p$ quase sempre e daí

$$\int_E |f|^p \leq \int_E ||f||_\infty^p = ||f||_\infty^p m(E) < \infty. \tag{1.41}$$

Agora, se $\alpha < ||f||_\infty$ então o conjunto

$$A \doteq \{x \in E; |f(x)| > \alpha\}$$

tem medida positiva e, sendo assim, $\lim_{p\to\infty}(m(A))^{1/p} = 1$.

Como,

$$||f||_p = \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p} \geq \alpha(m(A))^{1/p},$$

temos

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq \alpha, \quad \text{para todo } \alpha < ||f||_\infty.$$

Portanto,

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq ||f||_\infty.$$

Por (1.41)

$$||f||_p \leq ||f||_\infty m(E)^{1/p}$$

e, portanto,

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq ||f||_\infty \lim_{p\to\infty} m(E)^{1/p} = ||f||_\infty,$$

pois $m(E) > 0$.

Assim,

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq ||f||_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} ||f||_p,$$

isto é ,

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

□

Teorema 1.42 *Se* $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ *e* $m(E) < \infty$ *então* $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$.

Demonstração:

Se $p_2 = \infty$ o resultado segue do Teorema 1.40.

Suponha que p_2 seja finito.

Temos

$$\int_E |f|^{p_1} = \int_{\{x\in E; |f(x)|\leq 1\}} |f|^{p_1} + \int_{\{x\in E; |f(x)|>1\}} |f|^{p_1} \leq m(E) + \int_E |f|^{p_2} < \infty.$$

$\square$

Proposição 1.43 *$L^p(E)$, $0 < p \leq \infty$, é um espaço vetorial.*

Demonstração:

O caso $p = \infty$ foi demonstrado no Corolário 1.39.

Suponha que $0 < p < \infty$. Sejam $f, g \in L^p(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos

$$\int_E |\lambda f|^p = |\lambda|^p \int_E |f|^p, \quad \text{portanto, } ||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p < \infty.$$

Assim, $\lambda f \in L^p(E)$.

Como

$$(|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

obtemos

$$\int_E |f+g|^p \leq \int_E (|f| + |g|)^p \leq 2^p \int_E (|f|^p + |g|^p) = 2^p(||f||_p^p + ||g||_p^p) < \infty.$$

Assim, $f + g \in L^p(E)$.

$\square$

O Corolário 1.39 diz que $||\cdot||_\infty$ é uma norma. Na demonstração do teorema acima vimos que se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^p(E)$ então $||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p$. Também é claro que $||f||_p \geq 0$ e $||f||_p = 0$ se e somente se $f = 0$ quase sempre, isto é, $[f] = 0$. Para mostrar que $||\cdot||_p$ é uma norma, resta mostrar a desigualdade triangular. Note que da demonstração do Teorema 1.43 segue apenas que $||f+g||_p \leq 2(||f||_p^p + ||g||_p^p)^{1/p}$.

Dado $p \in [1, \infty]$ definimos o expoente conjugado de p como sendo o único $p^* \doteq q \in [1, \infty]$ que satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

com a convenção que $1/\infty = 0$. É claro que o expoente conjugado de q é p.

Temos que se $1 < p < \infty$ então $q = p/(p-1)$, se $p = 1$ então $q = \infty$ e se $p = \infty$ então $q = 1$. Em particular, se $p = 2$ então $q = 2$.

Teorema 1.44 (Desigualdade de Hölder para funções) *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e q seu expoente conjugado. Se f e g são mensuráveis em E então vale a seguinte desigualdade*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q. \tag{1.45}$$

Em particular, se $f \in L^p(E)$ e $g \in \ell^q(E)$ então $fg \in L^1(E)$. E neste caso, igualdade ocorre em (1.45) *no caso em que $1 < p, q < \infty$ se e somente se e $||g||_q^q |f|^p = ||f||_p^p |g|^q$ quase sempre.*

Demonstração:

Se $||f||_p = 0$ ou $||g||_q = 0$ então $f = 0$ ou $g = 0$ quase sempre. Logo, $fg = 0$ quase sempre. Dessa forma, valem a igualdade em (1.45) e $||g||_q^q |f|^p = ||f||_p^p |g|^q$.

Podemos supor então que $0 < ||f||_p, ||g||_q$.

Se $||f||_p = \infty$ ou $||g||_q = \infty$ então o lado direito de (1.45) é infinito e não há nada mais a provar.

Vamos portanto supor que $0 < ||f||_p, ||g||_q < \infty$.

Se $p = 1$ então $q = \infty$ e

$$||fg||_1 = \int |fg| = \int |f||g| \leq ||g||_\infty \int |f| = ||f||_1 ||g||_\infty.$$

De modo análogo se prova o caso em que $p = \infty$.

Suponha agora que $1 < p < \infty$ e, consequentemente, temos $1 < q < \infty$.

Coloque $F = |f|/||f||_p$ e $G = |g|/||g||_q$. Temos $||F||_p = ||G||_q = 1$.

Aplicando o Lema 1.14 com $\alpha = F(x)^p$, $\beta = G(x)^q$ e $\lambda = p^{-1}$, observando que $1 - \lambda = q^{-1}$, obtemos

$$F(x)G(x) \leq p^{-1}F(x)^p + q^{-1}G(x)^q \tag{1.46}$$

e

$$\int FG \leq p^{-1}\int F^p + q^{-1}\int G^q = p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{1.47}$$

Portanto,

$$\int |fg| = ||f||_p||g||_q \int FG \leq ||f||_p||g||_q,$$

isto é,

$$\int |fg| \leq ||f||_p||g||_q. \tag{1.48}$$

Agora, como $||F||_p = ||G||_q = 1$

$$\int |fg| = ||f||_p||g||_q \Leftrightarrow \int FG = 1 \Leftrightarrow \int FG = ||F||_p||G||_q = 1$$

$$\int FG = 1 \Leftrightarrow \int FG = p^{-1} + q^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \int FG = p^{-1}||F||_p^p + q^{-1}||G||_q^q \Leftrightarrow \int FG = p^{-1}\int F^p + q^{-1}\int G^q$$

$$\Leftrightarrow \int FG = \int (p^{-1}F^p + q^{-1}G^q) \Leftrightarrow \int (p^{-1}F^p + q^{-1}G^q - FG) = 0.$$

Mas, por (1.46) $p^{-1}F^p + q^{-1}G^q - FG \geq 0$. Logo,

$$\int (p^{-1}F^p + q^{-1}G^q - FG) = 0 \Leftrightarrow FG = p^{-1}F^p + q^{-1}G^q \text{ q. s.}$$

$$\overset{\text{Lema 1.14}}{\Leftrightarrow} F^p = G^q \text{ q. s. } \Leftrightarrow |f|^p/||f||_p^p = |g|^q/||g||_q^q \text{ q. s.}$$
$$\Leftrightarrow ||g||_q^q|f|^p = ||f||_p^p|g|^q \text{ q. s. .}$$

□

Com a desigualdade de Hölder podemos provar que $||\cdot||_p$ satisfaz a desigualdade triangular.

Teorema 1.49 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ são mensuráveis e $p \in [1, \infty]$ então*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \tag{1.50}$$

Demonstração:

Se $||f||_p = \infty$ ou $||g||_p = \infty$, o lado direito de (1.50) e infinito e o teorema está provado.

Se $||f+g||_p = 0$ também não há mais nada a ser demonstrado.

O caso em que $p = \infty$ foi demonstrado no Corolário 1.39. O caso $p = 1$ é trivial pois $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Suponhamos assim que $1 < p < \infty$, que $f, g \in L^p(E)$ e $||f+g||_p \neq 0$ (portanto, $0 < ||f+g||_p < \infty$). Seja q o expoente conjugado de p, isto é, $q = p/(p-1)$.

$$||f+g||_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}[|f|+|g|]$$

$$= \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |g|^p\right)^{1/p}$$

$$\overset{(p-1)q=p}{=} \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \left[\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$= ||f+g||_p^{p/q} \left(||f||_p + ||g||_p\right).$$

Portanto,

$$||f+g||_p = ||f+g||_p^{p-p/q} \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

□

Corolário 1.51 *Se $1 \leq p \leq \infty$ então $(L^p(E), ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado.*

Exemplo 1.52 *Se $0 < p < 1$ então $||\cdot||_p$ não é uma norma em $L^p((0,1))$.*

Sejam $f = \chi_{(0,1/2)}$ e $g = \chi_{[1/2,1)}$. Temos

$$||f+g||_p = ||1||_p = \left(\int_{(0,1)} 1\right)^{1/p} = 1,$$

$$||f||_p = \left(\int_{(0,1/2)} 1\right)^{1/p} = 2^{-1/p}$$

e

$$||g||_p = \left(\int_{[1/2,1)} 1\right)^{1/p} = 2^{-1/p}.$$

Assim,

$$||f||_p + ||g||_p = 2 \cdot 2^{-1/p} = 2^{1-1/p} < 1 = ||f+g||_p.$$

Teorema 1.53 *Se $1 \leq p \leq \infty$ então $L^p(E)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Vejamos o casos $p = \infty$.

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $L^\infty(E)$.

Pela Proposição 1.37 para cada $n, m \in \mathbb{N}$ existe um conjunto de medida nula $Z_{n,m} \subset E$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty, \quad x \in E \setminus Z_{n,m}.$$

Coloque $Z = \cup_{n,m\in\mathbb{N}} Z_{k,m}$. Temos $m(Z) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$ se $n, m \geq n_0$. Logo, para todo $x \in E \setminus Z$ temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, se $n, m \geq n_0$. Ou seja, a sequência de funções (f_n) é *uniformemente de Cauchy* em $E \setminus Z$ pois n_0 só depende de ε. Desta forma, f_n converge uniformemente em $E \setminus Z$. De fato, como (f_n) é uniformemente de Cauchy em $F \doteq E \setminus Z$, é trivialmente uma sequência de Cauchy. Logo, converge pontualmente para alguma função h em F. Mostremos que esta convergência é, de fato, uniforme.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ então, para todo $x \in F$, temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$.

Para cada $x \in F$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_x$, $|f_n(x) - h(x)| < \varepsilon/3$. Coloque $M_x = \max\{N, N_x\}$.

Dessa forma, se $n \geq N$ e para todo $x \in F$ temos

$$|f_n(x) - h(x)|$$

$$\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_{M_x}(x)| + |f_{M_x}(x) - h(x)| < \varepsilon,$$

ou seja, f_n converge uniformemente para h em F.

Defina

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in F \\ 0, & \text{se } x \in Z \end{cases} .$$

Note que f é mensurável pois é igual quase sempre ao limite de uma sequência de funções mensuráveis.

Como f_n converge uniformemente para $f = h$ em $F = E \setminus Z$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e $x \in E \setminus Z$. Desta forma, se $\alpha \geq \varepsilon$ e $n \geq N$ então

$$\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \alpha\} \subset \{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset Z$$

e, consequentemente, $m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) = 0$.

Assim, se $n \geq N$

$$||f_n - f||_\infty = \inf\{\alpha \geq 0; m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) = 0\} \leq \varepsilon. \quad (1.54)$$

Claramente $f \in L^\infty(E)$, pois $f = (f - f_N) + f_N$, e de (1.54) temos que f_n converge para f em $L^\infty(E)$.

Suponha agora que $1 \leq p < \infty$.

Pelo Teorema 1.26 basta mostrarmos que se $f_n \in L^p(E)$ é tal que

$$M \doteq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p$$

é convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para alguma função de $L^p(E)$.

Seja $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$ e coloque $g = \lim_{n\to\infty} g_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$. Temos

$$g_n(x) \nearrow g(x) \in [0, \infty]$$

e, portanto,

$$g_n^p(x) \nearrow g^p(x) \in [0, \infty].$$

Pela desigualdade de Minkowski

$$||g_n||_p = ||\sum_{k=1}^{n} |f_k|||_p \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p = M.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$||g||_p^p = \int |g|^p = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p \leq M^p,$$

isto é, $||g||_p \leq M$.

Portanto, $g \in L^p(E)$, isto é, g^p é integrável. Segue que g^p é finita quase sempre e, assim, $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ também é finita quase sempre. Seja $Z \subset E$ um conjunto de medida nula tal que $g(x) \in [0, \infty)$ se $x \in E \setminus Z$.

Assim, se $x \in E \setminus Z$ a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge para todo $x \in E \setminus Z$.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), & \text{se } x \in E \setminus Z \\ 0, & \text{se } x \in Z \end{cases}.$$

Claramente f é mensurável.

Mostremos que $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ converge para f em $L^p(E)$.

Pela definição de f temos que s_n converge pontualmente para f em $E \setminus Z$.

Também

$$|s_n| = |\sum_{k=1}^{n} f_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = g \in L^p(E)$$

e, portanto, em $E \setminus Z$ vale $|f| = \lim_{n\to\infty} |s_n| \leq g$. Assim, $||f||_p \leq ||g||_p$ e, consequentemente, $f \in L^p(E)$.

Em $E \setminus Z$ temos,

$$|s_n - f|^p \leq (|s_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p \in L^1(E)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - f|^p = (\lim_{n\to\infty} |s_n - f|)^p = 0.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$||s_n - f||_p^p = \int |s_n - f|^p \to 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} ||s_n - f||_p = 0,$$

ou seja, s_n converge para f em $L^p(E)$.

$\square$

Exemplo 1.55 *Considere o EVN $X = C([0,1];\mathbb{R})$ equipado com a norma $||\cdot||_1$ como no Exemplo 1.20. Sabemos que este EVN não é um espaço de Banach. No entanto, pelo Teorema 1.33 pode ser visto como um subespaço vetorial denso de algum espaço de Banach $(\widehat{X}, ||\cdot||\widehat{\ })$.*

Denotaremos, neste exemplo, a norma em $L^1([0,1])$ por $||\cdot||_{L^1}$, que é a mesma definida em (1.36). Pelo Teorema 1.53, $(L^1([0,1]), ||\cdot||_{L^1})$ é um espaço de Banach.

É claro $A : X \to L^1([0,1])$ dada por $Af = f$ é uma imersão isométrica pois $||Af||_{L^1} = ||f||_1$, para toda $f \in X$ pois as integrais de Lebesgue e Riemann coincidem para as funções de X. Logo, A é uma isometria entre X e $W \doteq A(X)$.

Mostremos que X é denso em $L^1([0,1])$. Uma maneira de mostrar isto é mostrar que as funções simples são densas em $L^1([0,1])$. Com isto mostra-se que as funções escadas também são densas neste espaço e finalmente mostra-se que toda função escada em $[0,1]$ pode ser aproximada na norma de L^1 por funções contínuas. Outra maneira é a seguinte:

Sejam $f \in L^1([0,1])$ e $\varepsilon > 0$.

Suponha por um momento que f seja limitada e tome $N > 0$ tal que $|f(t)| \leq N$ para todo $t \in [0,1]$.

Pelo teorema de Lusin existe um fechado $F \subset [0,1]$ tal que a restrição de f a F, que denotaremos por g, é contínua e a medida de Lebesgue de $[0,1] \setminus F$, $m([0,1] \setminus F)$, é menor do que $\varepsilon/2N$. Pelo teorema de extensão de

Tietze, existe uma função contínua em $[0,1]$*, que denotaremos por* h*, tal que* $h = g = f$ *em* F *e* $||h||_\infty \leq ||g||_\infty \leq N$*.*

Temos

$$||f-h||_{L^1} = \int_0^1 |f(t)-h(t)|\,dt = \int_F |f(t)-h(t)|\,dt + \int_{[0,1]\setminus F} |f(t)-h(t)|\,dt$$

$$= \int_{[0,1]\setminus F} |f(t)-h(t)|\,dt \leq \int_{[0,1]\setminus F} [|f(t)|+|h(t)|]\,dt \leq 2Nm([0,1]\setminus F) < \varepsilon.$$

Mostremos agora o casos geral. Sejam $f \in L^1([0,1])$ *e* $\eta > 0$*.*

Considere a sequência de funções (f_n) *dada por* $f_n = f\chi_{\{t\in[0,1];|f(t)|\leq n\}}$*. Temos que* f_n *é limitada* $||f_n||_{L^1} \leq ||f||_{L^1} < \infty$*. Além do mais,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |f(t)-f_n(t)| &= \lim_{n\to\infty} |f(t)|(1-\chi_{\{t\in[0,1];|f(t)|\leq n\}}) \\ &= |f(t)| \lim_{n\to\infty} (1-\chi_{\{t\in[0,1];|f(t)|\leq n\}}) = 0\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$ *e*

$$0 \leq |f-f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2|f| \in L^1([0,1]).$$

Segue do teorema da convergência dominada que

$$||f-f_n||_{L^1} = \int_0^1 |f(t)-f_n(t)|\,dt \to 0.$$

Tome n tal $||f-f_n||_{L^1} < \eta/2$*. Como* f_n *pertence a* $L^1([0,1])$ *e é limitada, pelo que já foi mostrado, existe uma função contínua* h *definida em* $[0,1]$ *tal que* $||f-h||_{L^1} < \eta/2$*. Assim,*

$$||f-h||_{L^1} \leq ||f-f_n||_{L^1} + ||f_n-h||_{L^1} < \eta.$$

Portanto, $(L^1([0,1]), ||\cdot||_{L^1})$ *é o completamento de* $(C([0,1];\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$*.*

1.2 Espaços vetoriais normados de dimensão finita

Teorema 1.56 *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita. Então*

1. *é possível definir uma norma em X;*

2. *quaisquer duas normas em X são equivalentes;*

3. *se $||\cdot||$ é uma norma em X então $(X,||\cdot||)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Seja $\mathscr{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ordenada de X. Fixaremos esta base para demonstrar os três itens.

1. Dado $x\in X$ existe uma única n-upla $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ tal que $x=\sum_{j=1}^n\alpha_je_j$, dessa forma fica bem definido colocaramos $||x||_1=\sum_{j=1}^n|\alpha_j|$.

Claramente, $||x||_1\geq 0$ e $||x||_1=0$ se e somente se $\sum_{j=1}^n|\alpha_j|=0$, ou seja, $x=0$.

Se $\lambda\in\mathbb{K}$ então $||\lambda x||_1=\sum_{j=1}^n|\lambda\alpha_j|=|\lambda|\sum_{j=1}^n|\alpha_j|=|\lambda|||x||_1$.

Se $y=\sum_{j=1}^n\beta_je_j$, $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n$ então

$$||x+y||_1=\sum_{j=1}^n|\alpha_j+\beta_j|\leq\sum_{j=1}^n|\alpha_j|+\sum_{j=1}^n|\beta_j|=||x||_1+||y||_1.$$

2. Seja $||\cdot||$ uma norma em X.

Em $\mathbb{K}^n$ considere a norma da soma $||(x_1,\ldots,x_n)||_s=\sum_{j=1}^n|x_j|$.

Defina $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{R}$ por $f(x_1,\ldots,x_n)=||\sum_{j=1}^n x_je_j||$. Temos

$$|f(x_1,\ldots,x_n)-f(y_1,\ldots,y_n)|=|\,||\sum_{j=1}^n x_je_j||-||\sum_{j=1}^n y_je_j||\,|$$

$$\leq||\sum_{j=1}^n(x_j-y_j)e_j||\leq C\sum_{j=1}^n|x_j-y_j|=C||(x_1,\ldots,x_n)-(y_1,\ldots,y_n)||_s$$

com $C=\max\{||e_j||; j=1,\ldots,n\}$. Portanto, f é lipschitziana.

Como $S=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n;\sum_{j=1}^n|x_j|=1\}$ é compacto em $\mathbb{K}^n$ pois é limitado e igual a $g^{-1}(\{1\})$, com $g((x_1,\ldots,x_n))=\sum_{j=1}^n|x_j|$ contínua, a restrição de f a S atinge o máximo M e o mínimo m sobre este conjunto. Além do mais, como $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ se e somente se $(x_1,\ldots,x_n)=(0,\ldots,0)$ temos que $m,M>0$.

Assim,

$$m \leq f(y_1, \dots, y_n) \leq M, \quad \text{para todo } (y_1, \dots, y_n) \text{ tal que } \sum_{j=1}^{n} |y_j| = 1.$$

Ou seja,

$$m \leq ||\sum_{j=1}^{n} y_j e_j|| \leq M, \quad \text{para todo } (y_1, \dots, y_n) \text{ tal que } \sum_{j=1}^{n} |y_j| = 1.$$

Dado $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $x \neq 0$ coloque

$$(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}(x_1, \dots, x_n) \in S.$$

Assim,

$$m \leq ||\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|} e_j|| \leq M,$$

ou seja,

$$m \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq ||\sum_{j=1}^{n} x_j e_j|| \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

isto é,

$$m||x||_1 \leq ||x|| \leq M||x||_1$$

sendo $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ a norma em X obtida no item anterior. Isto mostra que $||\cdot||$ e $||\cdot||_1$ são equivalentes. Pela transitividade, quaisquer duas normas em X são equivalentes.

3. Seja (y_ℓ) uma sequência de Cauchy em $(X, ||\cdot||)$. Em coordenadas, $y_\ell = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(\ell)} e_j$ com $\alpha_j^{(\ell)} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, n$. Coloque $\alpha^{(\ell)} = (\alpha_1^{(\ell)}, \dots, \alpha_n^{(\ell)}) \in \mathbb{K}^n$.

Como $||\cdot||$ e $||\cdot||_1$ são equivalentes, (y_ℓ) também é sequência de Cauchy em $(X, ||\cdot||_1)$. Como

$$||y_\ell||_1 = ||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(\ell)} e_j||_1 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(\ell)}| = ||\alpha^{(\ell)}||_s$$

segue que $(\alpha^{(\ell)})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}^n$. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ o limite de $(\alpha^{(\ell)})$.

Seja $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in X$. Temos

$$||y_\ell - y||_1 = ||\sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(\ell)} - \alpha_j) e_j||_1 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(\ell)} - \alpha_j| = ||\alpha^{(\ell)} - \alpha||_s \xrightarrow{\ell \to \infty} 0$$

Portanto, $(X, || \cdot ||_1)$ é de Banach e, consequentemente, $(X, || \cdot ||)$ também é

$\square$

Observação 1.57 *Como todo espaço vetorial possui uma base (de Hamel) é possível definir uma norma mesmo em espaços vetoriais de dimensão infinita. No caso de espaços de dimensão infinita a existência de uma base é mostrada usando-se o lema de Zorn (veja Lema 3.47).*

Se $\mathscr{B} = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma base do espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$ então para cada $x \in X$ existem, de modo único, $\alpha_\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \Lambda$ tais que somente um número finito destes números são não nulos e $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda x_\lambda$. A norma de x pode ser definida como $||x|| = \sup_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda| = \max_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda|$.

Corolário 1.58 *Sejam $(X, || \cdot ||)$ um EVN e $Y \subset X$ um subespaço vetorial de dimensão finita. Então Y com a restrição de $|| \cdot ||$ é um espaço de Banach. Em particular, Y é fechado em X.*

Demonstração:

A primeira afirmação é consequência do Teorema 1.56 enquanto que a segunda segue como na primeira parte da demonstração do Teorema 1.22 .

$\square$

Exemplo 1.59 *Considere o espaço de Banach do Exemplo 1.18 com, digamos, $a = 0$ e $b = 1$. Coloque $X = C([0, 1]; \mathbb{R})$.*

Considere o subespaço vetorial Y de X gerado pelas funções f_j, $j \geq 1$, dadas por $f_1(x) = 1$ e $f_j(x) = x^{j-1}$ se $n \geq 2$, $x \in [0, 1]$. Y tem dimensão infinita. Os elementos de Y são funções polinomiais restritas ao intervalo $[0, 1]$.

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a função $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j-1)!} f_j$ pertence a Y. Sabemos que (s_n) converge uniformemente, isto é, na norma do supremo, para a função $exp(x) = e^x$, $x \in [0,1]$. Claramente, $exp \notin Y$. Portanto, Y não é fechado (nem completo). É possível mostrar que Y é denso em X (teorema de Stone-Weierstrass).

O próximo resultado diz que a noção de compacidade em um EVN de dimensão finita é a mesma que temos em $\mathbb{K}^n$, ou seja, um conjunto é compacto se e somente se for fechado e limitado. Para a demonstração usaremos a caracterização de compacidade que diz que em um espaço métrico um conjunto M é compacto se somente se toda sequência em M possui subsequência que converge para algum elemento de M.

Teorema 1.60 *Sejam $(X, ||\cdot||)$ um EVN de dimensão finita e M um subconjunto de X. A fim de que M seja compacto é necessário e suficiente que M seja fechado e limitado.*

Demonstração:

Suponha que M seja compacto.

- M é fechado

Seja $x \in \overline{M}$ e tome $x_m \in M$ tal que $x_m \to x$. Como M é compacto, existe uma subsequência (x_{m_k}) que converge para algum elemento de M. Mas (x_{m_k}) é subsequência de (x_m) que converge para x. Portanto, $x \in M$, ou seja, M é fechado.

- M é limitado

Se M não fosse limitado, existiria uma sequência (x_m) em M tal que $||x_m|| \geq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por compacidade de M existe uma subsequência (x_{m_k}) de (x_m) que converge para algum $x \in M$. Logo, existe $C > 0$ tal que $||x_{m_k}|| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto implica em $m_k \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo. Portanto, M é limitado.

Note que até agora não foi preciso utilizar a hipótese do espaço ser de dimensão finita.

Reciprocamente, suponha que M seja fechado e limitado.

Seja $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ordenada de X.

Como estamos trabalhando com um espaço vetorial de dimensão finita, sabemos que as propriedades *ser fechado* e *ser limitado* independem da norma que se considera no espaço. Vamos admitir assim, sem perda de generalidade, que a norma dada é a norma $||\cdot||_1$ dada com relação a $\mathscr{B}$, ou seja, se $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, com $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n$, então $||x||_1 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$.

Seja (x_m) uma sequência em M. Em coordenadas, $x_m = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(m)} e_j$, com $\alpha_j^{(m)} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n$.

Como M é limitado, existe $C > 0$ $||x_m||_1 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)}| \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que $(\alpha_1^{(m)})$ é uma sequência limitada em $\mathbb{K}$ e possui, assim, uma subsequência $(\alpha_1^{(m_k)})$ que converge para algum $\beta_1 \in \mathbb{K}$.

Como $|\alpha_2^{(m_k)}| \leq ||x_{m_k}||_1 \leq C$ segue que $(\alpha_2^{(m_k)})$ também possui uma subsequência $(\alpha_2^{(m_{k_j})})$ que converge para algum $\beta_2 \in \mathbb{K}$. Note que $(\alpha_1^{(m_{k_j})})$ converge para β_1 pois é subsequência de $(\alpha_1^{(m_k)})$.

Prosseguindo, encontramos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ e uma subsequência $(\alpha_1^{(m_\ell)}, \ldots, \alpha_n^{(m_\ell)})$ de $(\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_n^{(m)})$ que converge para $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Seja $x = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$. Temos

$$||x_{m_\ell} - x||_1 = ||\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(m_\ell)} e_i - \sum_{i=1}^n \beta_i e_i||_1 = ||\sum_{i=1}^n (\alpha_i^{(m_\ell)} - \beta_i) e_i||_1$$

$$= \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m_\ell)} - \beta_i| \xrightarrow{\ell \to \infty} 0.$$

Como M é fechado, $x \in M$. Logo, (x_m) possui subsequência que converge em M e, portanto, M é compacto.

$\square$

Segue do teorema acima que a bola unitária fechada $B_1 = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$ de um EVN de dimensão finita é compacta.

Proposição 1.61 *Seja $(X, ||\cdot||)$ um EVN. Suponha que a bola unitária fechada $B_1 = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$ seja compacta. Então $M \subset X$ é compacto se e somente se for fechado e limitado.*

Demonstração:

Se M é compacto então M é fechado e limitado pois a parte da demonstração do Teorema 1.60 que se refere a esta implicação não dependeu de X ser de dimensão finita.

Suponha que M seja fechado e limitado.

Dado $R > 0$ considere a bola fechada $B_R = \{x \in X; ||x|| \leq R\}$. Seja $h_R : X \to X$ dada por $h_R(x) = Rx$. Temos

$$||h_R(x) - h_R(y)|| = ||Rx - Ry|| = R||x - y||.$$

Logo, h_R é contínua. Na verdade, como $h_R^{-1} = h_{1/R}$, h_R é um homeomorfismo.

Como $h_R(B_1) = B_R$ temos que B_R é compacto.

Como M é limitado, tomemos $R > 0$ tal que $M \subset B_R$.

Seja (x_n) uma sequência em M. Pela inclusão $M \subset B_R$, (x_n) é uma sequência no compacto B_R. Assim, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para algum $x \in B_R$. Mas x_{n_k} pertence a M, que é fechado. Logo, $x \in M$. Ou seja, toda sequência em M possui subsequência que converge para algum ponto de M, isto é, M é compacto.

$\square$

Vamos mostrar a recíproca do Teorema 1.60, isto é, se os compactos de um EVN são exatamente os conjuntos fechados e limitados então este espaço vetorial precisa ser de dimensão finita. Em um espaço que tem esta propriedade dos compactos serem caracterizados por serem conjuntos fechados e limitados, a bola fechada B_1 é compacta. Dessa forma, basta mostrarmos que se B_1 for compacta em um EVN então a dimensão deste espaço tem de ser finita.

Vamos precisar do seguinte

Lema 1.62 (F. Riesz) *Sejam $(Z, ||\cdot||)$ um EVN, Y um subespaço vetorial fechado de Z tal que $Y \neq Z$. Então para cada $\theta \in (0,1)$ existe $z \in Z$ tal que $||z|| = 1$ e $||z - y|| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração:

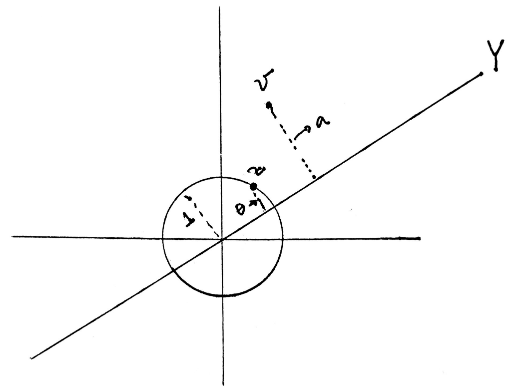

Figura 1.3: Lema de F. Riesz

Tome $v \in Z \setminus Y$. Seja $a = d(v,Y) = \inf\{||v-y||; y \in Y\}$.

Claramente, $a > 0$ pois, caso contrário, teríamos $v \in \overline{Y} = Y$.

Dado $\theta \in (0,1)$ existe $y_0 \in Y$ tal que $0 < a \leq ||v - y_0|| < a/\theta$.

Seja $z = (v - y_0)/||v - y_0||$, $||z|| = 1$.

Dado $y \in Y$ coloque $y_1 = y_0 + ||v - y_0||y \in Y$. Temos $||v - y_1|| \geq a$ e

$$||z - y|| = ||\frac{v - y_0}{||v - y_0||} - y|| = ||\frac{v - y_0}{||v - y_0||} - \frac{y_1 - y_0}{||v - y_0||}||$$

$$= \frac{||v - y_1||}{||v - y_0||} \geq \frac{a}{||v - y_0||} > \theta.$$

$\square$

Teorema 1.63 *Seja $(X, ||\cdot||)$ um EVN. Suponha que a bola unitária fechada $B_1 = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$ seja compacta. Então X tem dimensão finita.*

Demonstração:

Vamos utilizar a notação $[x_1, \ldots, x_n]$ para designar o subespaço de X que é gerado pelos vetores $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Suponha que X tenha dimensão infinita, ou seja, X não é gerado por nenhum subconjunto seu que seja finito.

Tome $x_1 \in X$ com $||x_1|| = 1$ e considere o subespaço vetorial gerado por x_1, $X_1 = [x_1]$. Pelo Corolário 1.58 X_1 é fechado. Além do mais, por ser unidimensional, $X_1 \neq X$.

Pelo Lema 1.62 existe $x_2 \in X$ satisfazendo $||x_2|| = 1$ e $||x_2 - x_1|| > 1/2$, pois $x_1 \in X_1$.

Seja $X_2 = [x_1, x_2]$. Temos que X_2 é fechado e não coincide com X. Pelo Lema 1.62 existe $x_3 \in X$ satisfazendo $||x_3|| = 1$, $||x_3 - x_1|| > 1/2$ e $||x_3 - x_2|| > 1/2$, pois $x_1, x_2 \in X_2$.

Suponha que $x_1, \ldots, x_n \in X$ tenham sido selecionados satisfazendo $||x_j|| = 441$, $j = 1, \ldots, n$ e $||x_j - x_i|| > 1/2$ se $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Considere o subespaço vetorial $X_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Como X_n é fechado e de dimensão finita, pelo Lema 1.62 existe $x_{n+1} \in X$ tal que $||x_{n+1}|| = 1$ e $||x_{n+1} - x_j|| > 1/2$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Assim, conseguimos uma sequência (x_n) de elementos de B_1 tal que $||x_n - x_m|| > 1/2$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \neq m$.

Como B_1 é compacto, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para algum $x \in B_1$. Como $n_k \neq n_\ell$ se $k \neq \ell$ temos $||x_{n_k} - x_{n_\ell}|| > 1/2$, o que é um absurdo, pois (x_{n_k}) é de Cauchy.

$\square$

Corolário 1.64 *Seja $(X, || \cdot ||)$ um EVN. Suponha que seja válido que $M \subset X$ é compacto se e somente se for fechado e limitado para todo $M \subset X$. Então X tem dimensão finita.*

Demonstração:

Como a bola fechada B_1 é fechada e limitada, ela é compacta. Pelo Teorema 1.63, X tem dimensão finita.

$\square$

Capítulo 2

Operadores lineares limitados

Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e T um operador (ou transformação) linear definido em um subespaço vetorial de X, que denotaremos por $\mathscr{D}(T)$, tomando valores em Y. O subespaço $\mathscr{D}(T)$ será chamado de domínio do operador T. A imagem de T, o subespaço vetorial $T(\mathscr{D}(T))$ de Y, será denotada por $\mathscr{R}(T)$. O seu núcleo, o subespaço vetorial de $\mathscr{D}(T)$ dado por $T^{-1}(\{0\})$, será denotado por $\mathscr{N}(T)$.

Usaremos geralmente a notação Tx para designar $T(x)$.

Definição 2.1 *Sejam $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é limitado se existir $C \geq 0$ tal que*

$$||Tx||_Y \leq C||x||_X, \quad \forall x \in \mathscr{D}(T).$$

Em geral, usaremos a notação genérica $||\cdot||$ para denotar tanto a norma $||\cdot||_X$ quanto $||\cdot||_Y$, a menos quando julgarmos que possa haver confusão.

A nomenclatura *limitado* é usada pois a imagem de conjuntos limitados por um operador limitado é um conjunto limitado. De fato, se $M \subset \mathscr{D}(T)$ é limitado então existe $K > 0$ tal que $||x||_X \leq K$ para todo $x \in M$. Assim, se T é como acima, $||Tx||_Y \leq C||x||_X \leq CK$ para todo $x \in M$. A recíproca também é verdadeira como veremos na Proposição 2.12.

Não devemos confundir essa noção com a que temos de funções limitadas, pois o único operador linear limitado neste último sentido é o operador nulo.

Definição 2.2 *Sejam* $(X, ||\cdot||_X)$ *e* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *espaços vetoriais normados sobre* $\mathbb{K}$. *O conjunto dos operadores limitados com domínio* X *tomando valores em* Y *será denotado por* $\mathscr{B}(X, Y)$. *No caso em que* $(X, ||\cdot||_X) = (Y, ||\cdot||_Y)$ *usaremos a notação* $\mathscr{B}(X)$.

Proposição 2.3 *Se em* $\mathscr{B}(X, Y)$ *utilizarmos as definições usuais de adição de funções e multiplicação de função por escalar,* $\mathscr{B}(X, Y)$ *se torna um espaço vetorial.*

Demonstração:

Sejam $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(X, Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Sejam $C_1, C_2 \geq 0$ tais que $||T_j(x)||_Y \leq C_j||x||_X$, para todo $x \in X$, $j, = 1, 2$.

Para todo $x \in X$ temos

$$||(T_1 + \lambda T_2)x||_Y \leq C_1||x||_X + |\lambda|C_2||x||_X = (C_1 + |\lambda|C_2)||x||_X.$$

□

Definição 2.4 *Seja* $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. *Se* $X = \{0\}$ *definimos* $||T|| = 0$, *caso contrário definimos*

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X}$$

A seguir veremos que $||T||$ define uma norma em $\mathscr{B}(X, Y)$. Esta norma é chamada de norma do operador. O caso $X = \{0\}$ é trivial.

Proposição 2.5 *Seja* $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ *com* $X \neq \{0\}$. *Então*

1. $||T|| = \sup_{||x||=1} ||Tx||$;
2. $||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx||$;
3. $||T||$ *é uma norma em* $\mathscr{B}(X, Y)$.

Demonstração:

1. Basta notar que pela homogeneidade da norma e da linearidade de T temos
$$||T|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{x\neq 0} ||T\left(\frac{x}{||x||}\right)|| = \sup_{||y||=1} ||Ty||.$$

2. Temos
$$||T|| = \sup_{||x||=1} ||Tx|| \leq \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||.$$
Por outro lado, dado $x \in X$, $||x|| \leq 1$, $x \neq 0$ temos
$$||Tx|| = ||x|| \left|\left|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| \leq ||T||\,||x|| \leq ||T||.$$
Tomando supremo em x como acima e lembrando que $T(0) = 0$ chegamos a
$$\sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ ||x||\leq 1}} ||Tx|| \leq ||T||.$$

Portanto, $||T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||$.

3. Sejam $T, S \in \mathscr{B}(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Claramente $||T|| \geq 0$ e $||T|| = 0$ se e somente se $\sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = 0$, isto é, se e somente se $T \equiv 0$.

Também,
$$||\lambda T|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||\lambda Tx||}{||x||} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = |\lambda|||T||$$
e
$$\begin{aligned} ||T+S|| &= \sup_{x\neq 0} \frac{||(T+S)x||}{||x||} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx|| + ||Sx||}{||x||} \\ &= \sup_{x\neq 0} \left(\frac{||Tx||}{||x||} + \frac{||Sx||}{||x||}\right) \leq ||T|| + ||S|| \end{aligned}$$

Note que se $T : X \to Y$ é um operador linear limitado então $||T||$ é o menor número não negativo C satisfazendo $||Tx||_Y \leq C||x||_X$ para todo $x \in X$.

Exemplo 2.6 *Seja* $(X, ||\cdot||)$ *um EVN e o operador identidade* $I : X \to X$*. Como* $||Ix|| = ||x||$ *vemos que* $||I|| = 1$*.*

Exemplo 2.7 *Seja X um espaço vetorial. Considere em X as normas $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$. Sejam X_1 e X_2 os EVN $(X, ||\cdot||_1)$ e $(X, ||\cdot||_2)$, respectivamente. Então o operador identidade $I : X_1 \to X_2$ é limitado se e somente se existir $C > 0$ tal que $||x||_2 \leq C||x||_1$ para todo $x \in X$. Veremos na Proposição 2.12 que um operador é limitado se e somente se for contínuo. Em particular, I é um homeomorfismo linear se e somente se as duas normas forem equivalentes.*

Exemplo 2.8 *Seja $X = C([0,1];\mathbb{R})$ e considere as normas $(X, ||\cdot||_\infty)$ e $(X, ||\cdot||_1)$ como nos Exemplos (1.18) e (1.20), respectivamente.*

Considere o operador identidade $I_1 : (X, ||\cdot||_\infty) \to (X, ||\cdot||_1)$. Temos para $x \in X$,

$$||I_1 x||_1 = ||x||_1 = \int_0^1 |x(t)|\, dt \leq ||x||_\infty.$$

Logo, I_1 é limitado e $||I_1|| \leq 1$.

Como a função constante $x_1 \equiv 1 \in X$ satisfaz $||x_1||_\infty = 1$ e $||I_1 x_1||_1 = ||x_1||_1 = 1$ temos $||I_1|| = 1$.

Considere agora a identidade $I_2 : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_\infty)$. Considere a sequência de funções contínuas

$$x_n(t) = \begin{cases} 2n - 2n^2 t, & t \in [0, 1/n] \\ 0, & t \in [0,1] \setminus [0, 1/n] \end{cases} .$$

Temos

$$||x_n||_1 = \int_0^1 |x_n(t)|\, dt = \int_0^{1/n} (2n - 2n^2 t)\, dt = 2 - 1 = 1$$

enquanto que

$$||I_2 x_n||_\infty = ||x_n||_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = \sup_{t \in [0,1/n]} (2n - 2n^2 t) = 2n.$$

Dessa forma,

$$\frac{||I_2 x_n||_\infty}{||x_n||_1} = 2n \xrightarrow{n \to \infty} \infty,$$

ou seja, I_2 não é limitado. $\square$

Exemplo 2.9 *Considere* $Y = C^\infty([0,1];\mathbb{R})$ *como subespaço vetorial do EVN* $(C([0,1];\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$.

Seja $T : Y \to Y$ *o operador derivação, isto é,* $Tx = x'$, $x \in Y$.

Considere a sequência $x_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. *Temos que* $x_n \in Y$, $||x_n||_\infty = 1$ *enquanto que* $||Tx_n||_\infty = ||x_n'||_\infty = n$. *Portanto,* T *não é limitado.*

Exemplo 2.10 *Seja* $\kappa : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Considere o EVN* $X = (C([0,1];\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$.

Dada $x \in X$ *defina*

$$(Tx)(t) = \int_0^1 \kappa(t,\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,1].$$

Mostremos que $Tx \in X$.

Como κ *é contínua e* $[0,1]^2$ *é compacto,* κ *é uniformemente contínua em* $[0,1]^2$. *Logo, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que sempre que*

$$(t,\tau), (t_0,\tau_0) \in [0,1]^2 \text{ são tais que } \sqrt{(t-t_0)^2 + (\tau-\tau_0)^2} < \delta$$

então

$$|\kappa(t,\tau) - \kappa(t_0,\tau_0)| < \varepsilon/(||x||_\infty + 1).$$

Em particular, se $t, t_0 \in [0,1]$, $|t - t_0| < \delta$ *então*

$$|\kappa(t,\tau) - \kappa(t_0,\tau)| < \varepsilon/(||x||_\infty + 1) \text{ para todo } \tau \in [0,1].$$

Assim,

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t_0)| = |\int_0^1 \kappa(t,\tau)x(\tau)\,d\tau - \int_0^1 \kappa(t_0,\tau)x(\tau)\,d\tau|$$

$$\leq \int_0^1 |\kappa(t,\tau) - \kappa(t_0,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \leq ||x||_\infty \frac{\varepsilon}{||x||_\infty + 1} < \varepsilon.$$

Claramente, $T : X \to X$ *é linear.*

Se $x \in X$ *então*

$$||Tx||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\int_0^1 \kappa(t,\tau)x(\tau)\,d\tau| \leq \sup_{(t,\tau)\in[0,1]^2} |\kappa(t,\tau)| ||x||_\infty.$$

Isto mostra que T *é limitado e que* $||T|| \leq \sup_{(t,\tau)\in[0,1]^2} |\kappa(t,\tau)|$.

Proposição 2.11 *Sejam $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$ EVN. Suponha que X seja de dimensão finita. Se $T : X \to Y$ é linear então T é limitado.*

Demonstração:

Seja $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ordenada de X. E considere em X a norma $||\cdot||_1$ associada a $\mathscr{B}$ descrita na demonstração do Teorema 1.56.

Dado $x \in X$ podemos escrever $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n$.

Seja $C_0 = \max\{||Te_j||_Y; j = 1, \ldots, n\}$. Temos

$$||Tx||_Y = ||T\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j||_Y = ||\sum_{j=1}^{n}\alpha_j Te_j||_Y \leq \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|||Te_j||_Y$$

$$\leq C_0\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j| = C_0||x||_1 \leq C||x||_X$$

para alguma constante $C > 0$ pois $||\cdot||_X$ e $||\cdot||_1$ são equivalentes.

□

Proposição 2.12 *Sejam X e Y EVN e $T : X \to Y$ um operador linear.*

As seguintes afirmações são equivalentes:

i) T é limitado.

ii) T é contínuo na origem.

iii) T é contínuo em X.

iv) T manda conjuntos limitados em X em conjuntos limitados em Y.

Demonstração:

(i) ⇒ (ii) Existe $C \geq 0$ tal que

$$||Tx|| \leq C|x||, \quad \forall x \in X.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon/(C+1) > 0$. Se $||x|| < \delta$ então

$$||Tx - T0|| = ||Tx|| \leq C||x|| \leq C\delta = \frac{C}{C+1}\varepsilon < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Sejam $x_o \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como T é contínuo na origem existe $\delta > 0$ tal que $||Tx|| < \varepsilon$ se $||x|| < \delta$.

Assim, se $||x - x_0|| < \delta$ então

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| < \varepsilon.$$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Como T é contínuo em X, é contínuo na origem. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $||x|| < \delta$ então $||Tx|| \leq 1$.

Se $x \neq 0$ coloque $x' = \delta x/2||x||$. Como $||x'|| = \delta/2 < \delta$ temos

$$||Tx'|| = \frac{\delta}{2||x||}||Tx|| \leq 1 \Rightarrow ||Tx|| \leq \frac{2}{\delta}||x||.$$

Como a desigualdade acima também é verdadeira para $x = 0$, vemos que T é limitado.

(i) $\Rightarrow$ *(iv)* Já foi demonstrado na página 51.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* Como a bola $B_1 = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$ é limitada, existe $C \geq 0$ tal que $||Tx|| \leq C$ para todo $x \in B_1$. Se $x \in X$, $x \neq 0$, então $x/||x|| \in B_1$ e, portanto, $||T(x/||x||)|| \leq C$, isto é, $||Tx|| \leq C||x||$.

$\square$

Teorema 2.13 *Sejam X e Y EVN. Suponha que Y seja um espaço de Banach. Então $\mathscr{B}(X,Y)$ equipado com a norma do operador é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $\mathscr{B}(X,Y)$.

Seja $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ então $||T_n - T_m|| < \varepsilon/(||x|| + 1)$.

Assim, se $n, m \geq N$ então

$$||T_nx - T_mx|| = ||(T_n - T_m)x|| \leq ||T_n - T_m||\,||x|| \leq \frac{\varepsilon}{||x|| + 1}||x|| < \varepsilon.$$

Desse modo, (T_nx) é uma sequência de Cauchy em Y, que é completo.

Defina $T : X \to Y$ por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_nx \in Y$.

Mostremos que T é linear. Sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

$$T(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} [T_n x + \lambda T_n y] = Tx + \lambda Ty.$$

Mostremos que T é limitado.

Dado $\eta > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $||T_n - T_m|| < \eta$ sempre que $n, m \geq N_1$. Segue que se $x \in X$ então

$$||T_n x - T_m x|| = ||(T_n - T_m)x|| \leq ||T_n - T_m||\, ||x|| \leq \eta ||x||$$

sempre que $n, m \geq N_1$.

Como $T_m x \to Tx$, pela continuidade da norma vem que

$$||T_n x - Tx|| \leq \eta ||x||$$

para todo $n \geq N_1$ e $x \in X$. Segue que $T_n - T \in \mathscr{B}(X, Y)$ e

$$||T_n - T|| \leq \eta \quad \text{se} \quad n \geq N_1. \tag{2.14}$$

Portanto, $T = T_n - (T_n - T) \in \mathscr{B}(X, Y)$ e $T_n \to T$ em $\mathscr{B}(X, Y)$ por (2.14).

□

Definição 2.15 *O dual de um EVN X é o espaço vetorial normado $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ que é formado pelos funcionais lineares limitados de X. Em geral, usaremos letras minúsculas para representar os elementos de X^*. Se $f \in X^*$ então $||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)|$ (ou qualquer outra fórmula como na Proposição 2.5)*

Note que como $\mathbb{K}$ é completo, X^* é um espaço de Banach independentemente de X ser ou não completo.

O dual algébrico de um espaço vetorial é o espaço vetorial formado pelos funcionais lineares em X. Em geral, o dual algébrico é estritamente maior do que o dual (topológico) de X, X^*. No entanto, segue da Proposição 2.11 que o dual algébrico de um EVN X de dimensão finita coincide com X^*.

Proposição 2.16 *Considere em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana. Então $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n*}$ são isométricos.*

Demonstração:

Sejam $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ a base dual de $\mathscr{B}$, isto é, a base formada pelos funcionais lineares f_j que satisfazem $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Aqui δ_{ij} é a função delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$.

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n*}$ o isomorfismo tal que $Te_j = f_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$||Tx|| = ||T(\sum_{j=1}^n x_j e_j)|| = ||\sum_{j=1}^n x_j Te_j|| = ||\sum_{j=1}^n x_j f_j||$$

$$= \sup_{||z||=1} |\sum_{j=1}^n x_j f_j(z)| = \sup_{||z||=1} |\sum_{j=1}^n x_j f_j(\sum_{i=1}^n z_i e_i)|$$

$$= \sup_{\sqrt{\sum_{k=1}^n z_k^2}=1} |\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j z_i f_j(e_i)| = \sup_{\sqrt{\sum_{k=1}^n z_k^2}=1} |\sum_{j=1}^n x_j z_j| \leq ||x||\,||z|| \leq ||x||.$$

É claro que $||T0|| = ||0||$. Se $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \neq 0$, tomando $z_0 = x/||x||$ temos $||z_0|| = 1$ e

$$\sup_{\sqrt{\sum_{k=1}^n z_k^2}=1} |\sum_{j=1}^n x_j z_j| \geq |\sum_{j=1}^n x_j \frac{x_j}{||x||}| = ||x||.$$

Portanto

$$||Tx|| = \sup_{\sqrt{\sum_{k=1}^n z_k^2}=1} |\sum_{j=1}^n x_j z_j| = ||x||,$$

ou seja, T é uma isometria.

$\square$

Observação 2.17 *Ao longo deste texto utilizaremos a mesma notação da função δ de Kronecker introduzida acima mas em outros domínios, isto é, dado um conjunto A não vazio definimos a função δ de Kronecker em A como sendo a função de $A \times A$ em $\{0, 1\}$ que a cada par ordenado $(a, b) \in A \times A$ associa o número $\delta_{ab} \in \{0, 1\}$ de modo que $\delta_{ab} = 1$ se e somente se $a = b$.*

Teorema 2.18 *(Extensão linear limitada) Sejam X e Y EVN. Suponha que Y seja um espaço de Banach. Seja $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ um operador linear limitado. Então existe um único operador linear limitado $\widetilde{T} : \overline{\mathscr{D}(T)} \subset X \to Y$ que estende T satisfazendo $||\widetilde{T}|| = ||T||$.*

Demonstração:

Seja $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$. Tome $x_n \in \mathscr{D}(T)$ tal que $x_n \to x$. Temos que (Tx_n) é sequência de Cauchy em Y pois $||Tx_n - Tx_m|| \leq ||T||\,||x_n - x_m||$. Como Y é Banach, existe $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$.

Mostremos que y é independente da sequência de $\mathscr{D}(T)$ que converge para x. Seja $z_n \in \mathscr{D}(T)$ também convergindo para x. Considere a sequência (y_n) de $\mathscr{D}(T)$ dada por $y_{2n-1} = x_n$ e $y_{2n} = z_n$. Temos que $y_n \to x$ pois y_{2n-1} e $y_{2n} \to x$. Temos, como acima, que (Ty_n) é convergente. Mas $Ty_{2n-1} = Tx_n \to y$ e, portanto, $Tz_n = Ty_{2n} \to y$. Podemos, portanto, definir $\widetilde{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$ sendo (x_n) qualquer sequência de $\mathscr{D}(T)$ que convirja para x.

Mostremos que $\widetilde{T} : \overline{\mathscr{D}(T)} \to Y$ como acima é linear.

Sejam $x, y \in \overline{\mathscr{D}(T)}$ e tome $x_n, y_n \in \mathscr{D}(T)$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Como T é linear e limitado,

$$\widetilde{T}(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + \lambda y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lambda \lim_{n\to\infty} Ty_n = \widetilde{T}x + \lambda\widetilde{T}y.$$

Claramente, se $x \in \mathscr{D}(T)$, tomando a sequência constante (x) temos $\widetilde{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx = Tx$. Ou seja, $\widetilde{T}$ é uma extensão linear de T.

Mostremos agora que $\widetilde{T}$ é limitado e que $||\widetilde{T}|| = ||T||$

Seja $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$. Tome $x_n \in \mathscr{D}(T)$ tal que $x_n \to x$. Como $||Tx_n|| \leq ||T||\,||x_n||$ segue da continuidade da norma e da definição de $\widetilde{T}$ que $||\widetilde{T}x|| \leq ||T||\,||x||$, ou seja, $\widetilde{T}$ é limitado e $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$. Por outro lado,

$$||\widetilde{T}|| = \sup_{\substack{x\in\overline{\mathscr{D}(T)} \\ ||x||=1}} ||\widetilde{T}x|| \geq \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T) \\ ||x||=1}} ||Tx|| = ||T||.$$

Se $S : \overline{\mathscr{D}(T)} \subset X \to Y$ é também um operador linear limitado que estende T então, dado $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$, tomemos $x_n \in \mathscr{D}(T)$ convergindo para x. Segue que

$$Sx = S(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \widetilde{T}x.$$

$\square$

Exemplo 2.19 *O dual de $\ell^1(\mathbb{K})$ é isométrico a $\ell^\infty(\mathbb{K})$.*

Sejam $x = (x_j) \in \ell^1$ e $e_k = (\delta_{kj})$, sendo δ_{kj} a função delta de Kronecker. Observe que $||e_k||_1 = 1$. Defina $s_m = \sum_{k=1}^m x_k e_k$. Como $x \in \ell^1$,

$$||x - s_m||_1 = \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

ou seja $x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$.

Seja $f \in (\ell^1)^*$. Como f é linear e limitado e $s_m \to x$ em ℓ^1,

$$f(x) = f(\lim_{m\to\infty} s_m) = \lim_{m\to\infty} f(s_m) = \lim_{m\to\infty} f(\sum_{k=1}^m x_k e_k)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^\infty x_k f(e_k).$$

Além disso, como $|f(e_k)| \leq ||f||\,||e_k||_1 = ||f||$ segue que $(f(e_k)) \in \ell^\infty$.

Dessa forma fica bem definido

$$\begin{aligned} T : (\ell^1)^* &\longrightarrow \ell^\infty \\ f &\longmapsto (f(e_k)). \end{aligned}$$

- *T é linear*

Para $f, g \in (\ell^1)^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$T(f+\lambda g) = ((f+\lambda g)(e_k)) = (f(e_k)+\lambda g(e_k)) = (f(e_k))+\lambda(g(e_k)) = Tf+\lambda Tg.$$

- *T é limitado*

Para $f \in (\ell^1)^*$

$$||Tf||_\infty = ||(f(e_k))||_\infty = \sup_k |f(e_k)| \leq ||f||\,||e_k||_1 = ||f||.$$

- *T é uma imersão isométrica*

Para $f \in (\ell^1)^*$

$$||f|| = \sup_{||x||_1=1} |f(x)| = \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} |f(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k)| \leq \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||f(e_k)|$$

$$\leq \sup_k |f(e_k)| \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

$$= \sup_k |f(e_k)| \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} ||x||_1 = \sup_k |f(e_k)| = ||Tf||_\infty.$$

Portanto, $||Tf||_\infty = ||f||$.

- *T é sobrejetor*

Seja $y = (y_k) \in \ell^\infty$.

Para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell^1$ a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ é absolutamente convergente pois $|x_k y_k| \leq ||y||_\infty |x_k|$. Defina $g : \ell^1 \to \mathbb{K}$ como

$$g(x) = g(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Em particular, $g(e_\ell) = y_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $g \in (\ell^1)^*$.

- *g é linear*

Para $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, x' = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k e_k \in \ell^1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$g(x + \lambda x') = g(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x'_k e_k) = g(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + \lambda x'_k) e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + \lambda x'_k) y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x'_k y_k = g(x) + \lambda g(x').$$

- *g é limitado*

Temos

$$||g|| = \sup_{||x||_1=1} |g(x)| = \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} |g(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k)| = \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k|$$

$$\leq ||y||_\infty \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_1=1}} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = ||y||_\infty.$$

Finalmente, $Tg = (g(e_k)) = (y_k) = y$.

Exemplo 2.20 *Sejam* $p \in (1, \infty)$ *e* $q = p/(p-1)$. *O dual de* $\ell^p(\mathbb{K})$ *é isométrico a* $\ell^q(\mathbb{K})$.

Sejam $x = (x_j) \in \ell^p$ *e* $e_k = (\delta_{kj})$, *sendo* δ_{kj} *a função delta de Kronecker. Observe que* $||e_k||_p = 1$. *Defina* $s_m = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$. *Como* $x \in \ell^p$,

$$||x - s_m||_p^p = \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

ou seja $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

Seja $f \in (\ell^p)^*$. *Como* f *é linear e limitado e* $s_m \to x$ *em* ℓ^p,

$$f(x) = f(\lim_{m\to\infty} s_m) = \lim_{m\to\infty} f(s_m) = \lim_{m\to\infty} f(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *defina a sequência* $u_n = (\xi_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ *por*

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |f(e_k)|^q / f(e_k), & \text{caso } k \leq n \text{ e } f(e_k) \neq 0 \\ 0, & \text{caso } k > n \text{ ou } f(e_k) = 0 \end{cases}.$$

Note que $u_n \in \ell^p$ *pois* $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(n)}|^p$.

Também,

$$|\xi_k^{(n)}| = \begin{cases} |f(e_k)|^{q-1}, & \text{caso } k \le n \\ 0, & \text{caso } k > n \end{cases} .$$

Temos,

$$f(u_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(n)} f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \tag{2.21}$$

e

$$|f(u_n)| = f(u_n) \le ||f||\,||u_n||_p = ||f|| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{1/p}$$

$$= ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} = ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{(q-1)p} \right)^{1/p}$$

$$= ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1/p} \tag{2.22}$$

Combinando (2.21) *e* (2.22) *obtemos*

$$f(u_n) = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \le ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1/p} .$$

Assim, se $\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \neq 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1-1/p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{-1/p}$$

$$\le ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{-1/p} = ||f||,$$

ou seja,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq ||f||, \tag{2.23}$$

que também é válida se $\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q = 0$.

Tomando o limite em (2.23) *chegamos a*

$$||(f(e_k))||_q \leq ||f||, \tag{2.24}$$

isto é, $(f(e_k)) \in \ell^q$.

Dessa forma fica bem definido

$$\begin{aligned} T : (\ell^p)^* &\longrightarrow \ell^q \\ f &\longmapsto (f(e_k)). \end{aligned}$$

- T *é linear*

Para $f, g \in (\ell^p)^*$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$T(f+\lambda g) = ((f+\lambda g)(e_k)) = (f(e_k)+\lambda g(e_k)) = (f(e_k))+\lambda(g(e_k)) = Tf+\lambda Tg.$$

- T *é limitado*

Segue de (2.24).

- T *é uma imersão isométrica*

Para $f \in (\ell^p)^*$

$$||f|| = \sup_{||x||_p=1} |f(x)| = \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_p=1}} |f(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k)| \leq \sup_{\substack{x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_p=1}} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||f(e_k)|$$

$$\overset{Hölder}{\leq} \sup_{||x||_p=1} ||x||_p ||Tf||_q = ||Tf||_q \overset{(2.24)}{\leq} ||f||.$$

Portanto, $||Tf||_q = ||f||$.

- *T é sobrejetor*

Seja $y = (y_k) \in \ell^q$.

Para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell^p$ *a série* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ *é absolutamente convergente pela desigualdade de Hölder:* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq ||x||_p ||y||_q < \infty$.

Defina $g : \ell^p \to \mathbb{K}$ *como*

$$g(x) = g(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Em particular, $g(e_\ell) = y_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $g \in (\ell^p)^*$.

- *g é linear*

Para $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, x' = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k e_k \in \ell^p$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$g(x + \lambda x') = g(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x'_k e_k) = g(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + \lambda x'_k) e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + \lambda x'_k) y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x'_k y_k = g(x) + \lambda g(x').$$

- *g é limitado*

De fato,

$$||g|| = \sup_{||x||_p = 1} |g(x)| = \sup_{\substack{x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_p = 1}} |g(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k)|$$

$$= \sup_{\substack{x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \\ ||x||_p = 1}} |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| \leq \sup_{||x||_p = 1} ||x||_p ||y||_q = ||y||_q.$$

Finalmente, $Tg = (g(e_k)) = (y_k) = y$.

Capítulo 3

Espaços de Hilbert

3.1 Definição, exemplos, propriedades e o teorema do completamento

Definição 3.1 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ satisfazendo*

(PI1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X;$

(PI2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K};$

(PI3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X;$

(PI4) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X;$

(PI5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido com produto produto interno será, conforme a conveniência, denominado por EVPI.

Definição 3.2 *Seja X um EVPI.*

Dizemos que $x, y \in X$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. A notação $x \perp y$ significa que x e y são ortogonais.

Se $M \subset X$ é não vazio e $x \in X$ é ortogonal a todo elemento de M usaremos a notação $x \perp M$.

Note que $x, y \in X$ são ortogonais se e somente se $\langle y, x\rangle = 0$.

Proposição 3.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então, para todos $x, y \in X$ temos*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Demonstração:

Se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é válida.

Suponha que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Coloque $u = x/\sqrt{\langle x, x\rangle}$ e $v = y/\sqrt{\langle y, y\rangle}$. Basta mostrar que $|\langle u, v\rangle| \leq 1$.

Note que

$$\langle u, u\rangle = \langle \frac{x}{\sqrt{\langle x, x\rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x, x\rangle}}\rangle = \frac{\langle x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = 1$$

e similarmente $\langle v, v\rangle = 1$.

Temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u - \langle u, v\rangle v, u - \langle u, v\rangle v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle\langle v, u\rangle - \overline{\langle u, v\rangle}\langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle\overline{\langle u, v\rangle}\langle v, v\rangle \\ &= 1 - \langle u, v\rangle\overline{\langle u, v\rangle} - \overline{\langle u, v\rangle}\langle u, v\rangle + |\langle u, v\rangle|^2 \\ &= 1 - |\langle u, v\rangle|^2 - |\langle u, v\rangle|^2 + |\langle u, v\rangle|^2 \\ &= 1 - |\langle u, v\rangle|^2, \end{aligned}$$

isto é, $|\langle u, v\rangle| \leq 1$.

□

Proposição 3.4 *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$, define uma norma em X.*

Demonstração:

Temos

(N1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) Para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \, ||x||.$$

(N3) Para todos $x, y \in X$

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 \operatorname{Re} \langle y, x \rangle$$
$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \, ||y|| = (||x|| + ||y||)^2,$$

ou seja, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

$\square$

Dizemos que a norma acima está associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou ainda, que é proveniente deste produto interno.

Proposição 3.5 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e equipe X com a norma proveniente deste produto interno. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em X. Se*

1. *$x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$;*
2. *(x_n) e (y_n) são sequências sequências de Cauchy então $\langle x_n, y_n \rangle$ converge em $\mathbb{K}$.*

Demonstração:

1. Temos

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|$$
$$= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq ||x_n|| \, ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \, ||y|| \to 0,$$

pois $||x_n|| \to ||x||$ (Observação 1.10) e $||x_n - x||, ||y_n - y|| \to 0$.

2. Como no item anterior

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_m \rangle| + |\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_m, y_m \rangle|$$
$$= |\langle x_n, y_n - y_m \rangle| + |\langle x_n - x_m, y_m \rangle|$$
$$\leq ||x_n|| \, ||y_n - y_m|| + ||x_n - x_m|| \, ||y_m|| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

pois (x_n) e (y_n) são sequências sequências de Cauchy e $||x_n|| \to ||x||$ e $||y_n|| \to ||y||$.

$\square$

Definição 3.6 *Um espaço vetorial com produto interno que é completo com relação à norma proveniente do seu produto interno é chamado de espaço de Hilbert.*

Exemplo 3.7 *Em $\mathbb{K}^n$ para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{K}^n$ colocamos $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ que, claramente, define um produto interno. Além do mais, a norma associada é a norma euclidiana $||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$. Dessa forma, $\mathbb{K}^n$ com este produto interno é um espaço de Hilbert.*

Exemplo 3.8 *Sejam $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em $\ell^2(\mathbb{K})$. Pela desigualdade de Hölder, fica bem definido $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}$ que, claramente, define um produto interno. Além do mais, $||x||_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Dessa forma, $\ell^2(\mathbb{K})$ com este produto interno é um espaço de Hilbert.*

Note que em $\ell^2(\mathbb{K})$ a desigualdade de Hölder é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Definição 3.9 *Seja $(X, ||\cdot||)$ um EVN sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que a norma $||\cdot||$ satisfaz a identidade do paralelogramo se*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Ex. Resolvido 3.10 (Identidade de polarização – real) *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Suponha que a norma satisfaça a identidade do paralelogramo. Temos que*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2), \quad x, y \in X$$

define um produto interno em X.

Além do mais, a norma dada é associada a este produto interno.

Resolução:

(PI1) para todos $x, y, z \in X$ temos

$$4\langle x+y, z\rangle = ||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2$$

$$= (||(x+z)+y||^2 + ||(x+z)-y||^2) - (||(y-z)+x||^2 + ||(y-z)-x||^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(||x+z||^2 + ||y||^2 - ||y-z||^2 - ||x||^2) \\
&= 2[(||x+z||^2 - ||x-z||^2) + (||x-z||^2 + ||y||^2) + \\
&\quad +(||y+z||^2 - ||y-z||^2) - (||y+z||^2 + ||x||^2)] \\
&= 2[4\langle x,z\rangle + 4\langle y,z\rangle + (||x-z||^2 + ||y||^2) - (||y+z||^2 + ||x||^2)] \\
&= 8\langle x,z\rangle + 8\langle y,z\rangle + 2(||x-z||^2 + ||y||^2) - 2(||y+z||^2 + ||x||^2). \quad (3.11)
\end{aligned}
$$

Mas, como

$$\frac{1}{2}(x+y-z) + \frac{1}{2}(x-y-z) = x-z$$

e

$$\frac{1}{2}(x+y-z) - \frac{1}{2}(x-y-z) = y$$

temos que

$$
\begin{aligned}
2(||x-z||^2 + ||y||^2) &= 4(||\frac{1}{2}(x+y-z)||^2 + ||\frac{1}{2}(x-y-z)||^2) \\
&= ||x+y-z||^2 + ||x-y-z||^2. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Analogamente, como

$$\frac{1}{2}(x+y+z) + \frac{1}{2}(y+z-x) = y+z$$

e

$$\frac{1}{2}(x+y+z) - \frac{1}{2}(y+z-x) = x$$

temos que

$$
\begin{aligned}
2(||y+z||^2 + ||x||^2) &= 4(||\frac{1}{2}(x+y+z)||^2 + ||\frac{1}{2}(y+z-x)||^2) \\
&= ||x+y+z||^2 + ||y+z-x||^2. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Portanto, por (3.11), (3.12) e (3.13) obtemos

$$
\begin{aligned}
4\langle x+y,z\rangle &= 8\langle x,z\rangle + 8\langle y,z\rangle + \\
&+||x+y-z||^2 + ||x-y-z||^2 - ||x+y+z||^2 - ||y+z-x||^2 \\
&= 8\langle x,z\rangle + 8\langle y,z\rangle - (||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2) \\
&= 8\langle x,z\rangle + 8\langle y,z\rangle - 4\langle x+y,z\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$$

(PI3) Para todos $x, y \in X$ temos

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) = \frac{1}{4}(||y+x||^2 - ||y-x||^2) = \langle y, x\rangle.$$

(PI2) Sejam $x, y \in X$.

Se $n \in \mathbb{N}$ então, pelo item (PI1),

$$\langle nx, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, y\rangle = n\langle x, y\rangle.$$

Também

$$\langle -x, y\rangle = \frac{1}{4}(||-x+y||^2 - ||-x-y||^2)$$

$$= -\frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) = -\langle x, y\rangle$$

e $0\langle x, y\rangle = 0 = \langle 0x, y\rangle$.

Assim, $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ também temos

$$\langle \frac{1}{n}x, y\rangle = \frac{1}{4}(||\frac{1}{n}x + y||^2 - ||\frac{1}{n}x - y||^2)$$

$$= \frac{1}{4n^2}(||x+ny||^2 - ||x-ny||^2) = \frac{1}{n^2}\langle x, ny\rangle$$

$$= \frac{1}{n^2}\langle ny, x\rangle = \frac{1}{n}\langle y, x\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle.$$

Assim, se $r \in \mathbb{Q}$, tome $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ de modo que $r = p/q$. Assim,

$$\langle rx, y\rangle = \langle \frac{p}{q}x, y\rangle = p\langle \frac{1}{q}x, y\rangle = \frac{p}{q}\langle x, y\rangle = r\langle x, y\rangle.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e tome uma sequência de números racionais (r_n) que convirja para α.

Como

$$||\alpha x + y - (r_n x + y)|| = |\alpha - r_n|||x|| \to 0$$

e

$$||\alpha x - y - (r_n x - y)|| = |\alpha - r_n| ||x|| \to 0,$$

segue da continuidade da norma que

$$\langle \alpha x, y \rangle = \frac{1}{4}(||\alpha x + y||^2 - ||\alpha x - y||^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}(||r_n x + y||^2 - ||r_n x - y||^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle r_n x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} r_n \langle x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

(PI4) Para todo $x \in X$ temos $\langle x, x \rangle = \frac{1}{4}||2x||^2 = ||x|| \geq 0$.

(PI5) Temos $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Finalmente, para todo $x \in X$, $\langle x, x \rangle = \frac{1}{4}||2x||^2 = ||x||^2$.

■

Exercício 3.14 (Identidade de polarização – caso complexo) *Seja X um espaço vetorial normado sobre sobre $\mathbb{C}$. Suponha que a norma satisfaça a identidade do paralelogramo. Temos que*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x - iy||^2 - i||x + iy||^2), \quad x, y \in X$$

define um produto interno em X.

Além do mais, a norma dada é associada ao respectivo produto interno acima.

Exercício 3.15 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma norma $||\cdot||$ em X é proveniente de um produto interno se e somente se satisfaz identidade do paralelogramo.*

Exemplo 3.16 *Considere o espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ $(X, ||\cdot||_\infty)$, sendo $X = C([a, b]; \mathbb{R})$.*

Mostremos que, embora este espaço seja de Banach (ver Exemplo 1.18), ele não é um espaço de Hilbert.

Considere as funções $x, y \in X$ *dadas por* $x(t) = 1$ *e* $y(t) = (t-a)/(b-a)$. *Temos* $||x||_\infty = ||y||_\infty = 1$.

Como

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a} \quad e \quad x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

temos $||x+y||_\infty = 2$ *e* $||x-y||_\infty = 1$. *Assim,*

$$||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2 = 5 > 4 = 2(||x||_\infty^2 + ||y||_\infty^2).$$

Portanto, $||\cdot||_\infty$ *não provém de um produto interno.*

Exemplo 3.17 *Se* $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ *então o espaço de Banach* $(\ell^p(\mathbb{K}), ||\cdot||_p)$ *não é um espaço de Hilbert.*

De fato, considere $x = (x_n)$ *e* $y = (y_n)$ *com* $x_1 = 1 = x_2 = y_1 = 1$, $y_2 = -1$ *e* $x_n = y_n = 0$ *se* $n \geq 3$, *isto é,* $x = (1, 1, 0, \dots)$ *e* $y = (1, -1, 0, \dots)$.

Como para $1 \leq p < \infty$, $||x||_p = ||y||_p = 2^{1/p}$ *e* $||x+y||_p = ||x-y||_p = 2$, *então se* $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, *temos*

$$||x+y||_p^2 + ||x-y||_p^2 = 8 \neq 4 \cdot 2^{2/p} = 2(2^{2/p} + 2^{2/p}) = 2(||x||_p^2 + ||y||_p^2),$$

isto é, a norma não satisfaz a identidade do paralelogramo.

No caso em que $p = \infty$ *ainda temos* $||x+y||_\infty = ||x-y||_\infty = 2$, *mas* $||x||_\infty = ||y||_\infty = 1$. *Mesmo assim a identidade do paralelogramo não é satisfeita pois*

$$||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2 = 8 \neq 4 = 2 \cdot 2 = 2(||x||_\infty^2 + ||y||_\infty^2).$$

Definição 3.18 *Sejam* $(X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ *e* $(X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *com produto interno. Um isomorfismo entre estes espaços é uma transformação linear sobrejetora* $T : X_1 \to X_2$ *que satisfaz* $\langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ *para todos* $x, y \in X_1$. *Note que* T *é uma isometria quando consideramos* X_1 *e* X_2 *com as respectivas normas induzidas por cada um dos produtos internos. Dizemos que os espaços* $(X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ *e* $(X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ *são isomorfos ou isométricos. Em geral, denotaremos um isomorfismo neste sentido por* $T : (X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Como todo espaço vetorial com produto interno pode ser considerado como um espaço vetorial normado, pelo Teorema 1.33 ele pode ser visto como subespaço vetorial denso de um espaço de Banach. No teorema a seguir mostraremos que, na verdade, todo espaço vetorial com produto interno pode ser encarado como um subespaço vetorial denso de um espaço de Hilbert.

Teorema 3.19 (Completamento de um EVPI) *Seja* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço vetorial com produto interno. Então existem*

- *um espaço de Hilbert* $(\widehat{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle^{\widehat{}})$*,*
- *um subespaço vetorial denso* W *de* $\widehat{X}$ $(\overline{W} = \widehat{X})$ *e*
- *um isomorfismo entre EVPI* $A : X \to W$*.*

Além do mais, se existirem

- *um espaço de Hilbert* $(X', \langle\cdot,\cdot\rangle')$*,*
- *um subespaço vetorial denso* W' *de* X' $(\overline{W'} = X')$ *e*
- *um isomorfismo entre EVPI* $A' : X \to W'$

então $(\widehat{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle^{\widehat{}})$ *e* $(X', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ *são isomorfos como EVPI.*

Ou seja, $(\widehat{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle^{\widehat{}})$ *é único a menos de isomorfismo entre EVPI e será chamado de completamento de* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*;* X *pode ser visto como um subespaço vetorial denso de* $\widehat{X}$*.*

Demonstração:

Tome $\widehat{X}$, A e W como no Teorema 1.33.

Precisamos definir $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\widehat{}}$.

Sejam $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ e tome $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$. Como $||x_n||$ e $||y_n||$ são sequências de Cauchy, pela Proposição 3.5 existe $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle$. Coloque

$$\langle\, \widehat{x}\, ,\, \widehat{y}\, \rangle^{\widehat{}} = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle.$$

Vamos ver que este limite não depende dos representantes escolhidos. Se $(x'_n) \in \widehat{x}$ e $(y'_n) \in \widehat{y}$ então

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x'_n, y'_n\rangle| = |\langle x_n - x'_n, y_n\rangle - \langle x'_n, y'_n - y_n\rangle| =$$

$$\leq ||x_n - x'_n||\,||y_n|| + ||x'_n||\,||y_n - y'_n|| \to 0$$

pois $(x_n) \sim (x'_n)$, $(y_n) \sim (y'_n)$ e $||x_n||$ e $||y_n||$ convergem.

É direto mostrar que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\widehat{\ }$ define um produto interno em $\widehat{X}$

Note que

$$\sqrt{\langle\,\widehat{x}\,,\,\widehat{x}\,\rangle\widehat{\ }} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x_n\rangle} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\langle x_n, x_n\rangle} = \lim_{n\to\infty}||x_n|| = ||\,\widehat{x}\,||\widehat{\ },$$

sendo $||\cdot||\widehat{\ }$ a norma definida no Teorema 1.33.

Segue deste mesmo teorema que $(\widehat{X}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\widehat{\ })$ é um espaço de Hilbert e que $W = A(X)$ é denso em $\widehat{X}$.

Lembre que se $x \in X$ então $Ax \in \widehat{X}$ é a classe de equivalência que contém a sequência constante (x). Assim,

$$\langle\,Ax\,,\,Ay\,\rangle\widehat{\ } = \lim_{n\to\infty}\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Portanto, A é um isomorfismo entre os EVPI X e $A(X) = W$.

Sobre unicidade do espaço de Hilbert $(\widehat{X}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\widehat{\ })$ a menos de isomorfismos entre EVPI, observe que a bijeção linear $T = A(A')^{-1} : W' \to W$ satisfaz

$$\begin{aligned}\langle\,Tw'_1\,,\,Tw'_2\,\rangle\widehat{\ } &= \langle\,A(A')^{-1}w'_1\,,\,A(A')^{-1}w'_2\,\rangle\widehat{\ }\\ &= \langle (A')^{-1}w'_1, (A')^{-1}w'_2\rangle = \langle w'_1, w'_2\rangle',\end{aligned}$$

ou seja, é um isomorfismo ente os EVPI W' e W. Portanto, uma isometria entre estes EVN. Dessa forma, como na demonstração do Teorema 1.33 podemos definir a sobrejeção linear $T^* : X' \to \widehat{X}$ por $T^*x' = \lim_{n\to\infty} Tw'_n$ sendo (w'_n) qualquer sequência em W' que convirja para x' em X'.

Finalmente, dados $x', y' \in X'$, tome sequências (v'_n) e (w'_n) em W' convergindo para x' e y' em X', respectivamente, temos

$$\langle\,T^*x'\,,\,T^*y'\,\rangle\widehat{\ } = \langle\,\lim_{n\to\infty} Tv'_n\,,\,\lim_{n\to\infty} Tw'_n\,\rangle\widehat{\ } = \lim_{n\to\infty}\langle\,Tv'_n\,,\,Tw'_n\,\rangle\widehat{\ }$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle v'_n, w'_n\rangle' = \langle \lim_{n\to\infty} v'_n, \lim_{n\to\infty} w'_n\rangle' = \langle x', y'\rangle',$$

isto é, os EVPI $\widehat{X}$ e X' são isomorfos.

$\square$

Exemplo 3.20 *Seja* $X = C([0,1];\mathbb{R})$. *Para* $f, g \in X$ *defina* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. *É simples verificar que isto define um produto interno. Denote a norma associada por* $||\cdot||_2$.

Considere a sequência de funções (f_m) *do Exemplo 1.20, isto é,*

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1/2 \\ m(t-1/2), & 1/2 \le t \le 1/2 + 1/m \\ 1, & 1/2 + 1/m \le t \le 1 \end{cases}.$$

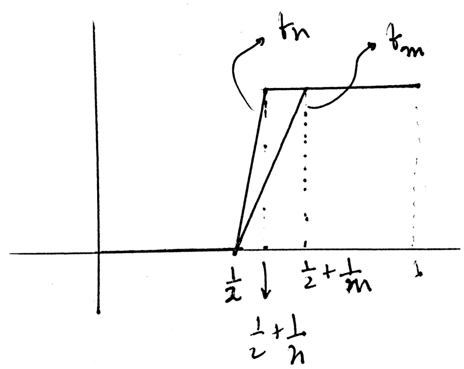

Figura 3.1: Esboço dos gráficos de f_n e f_m com $n > m$

Verifiquemos que f *é sequência de Cauchy. Dado* $\varepsilon > 0$ *tome* $N \in \mathbb{N}$ *tal* *que* $N \geq \max\{1/\varepsilon^2, 2\}$. *Para* $n > m \geq N$ *temos*

$$||f_n - f_m||_2^2 = \int_{1/2}^{1/2+1/n} (n-m)^2(t-1/2)^2\,dt + \int_{1/2+1/n}^{1/2+1/m} (1-m(t-1/2))^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3m}(1-m/n)^2 \leq \frac{1}{3m} \leq \frac{1}{3N} \leq \frac{\varepsilon^2}{3} < \varepsilon^2.$$

Suponha que (f_m) *convirja em* X *para alguma função* $f \in X$. *Temos*

$$||f - f_m||_2^2 = \int_0^1 (f(t) - f_m(t))^2\,dt$$

$$= \int_0^{1/2} (f(t))^2\,dt + \int_{1/2}^{1/2+1/m} (f(t) - f_m(t))^2\,dt + \int_{1/2+1/m}^1 (1-f(t))^2\,dt.$$

Como cada parcela acima é não negativa, temos

$$\int_0^{1/2} (f(t))^2\,dt, \int_{1/2}^{1/2+1/m} (f(t) - f_m(t))^2\,dt, \int_{1/2+1/m}^1 (1-f(t))^2\,dt$$

$$\leq ||f - f_m||_2^2 \to 0$$

segue que

- $\int_0^{1/2}(f(t))^2\,dt = 0$, *ou seja,* $f(t) = 0$ *se* $t \in [0, 1/2]$;

- $0 \leq \int_{1/2}^{1/2+1/m}(f(t) - f_m(t))^2\,dt \leq (1 + ||f||_\infty)^2/m \to 0$ *(*f *é limitada em* $[0,1]$ *por ser contínua);*

- *tomando* $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ *e* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{2} + \frac{1}{m_0} < c$, *temos para todo* $m \geq m_0$ *que* $f_m(t) = 1$ *para* $t \in [c, 1]$ *e, portanto,*

$$\int_c^1 (1 - f(t))^2\,dt = \int_c^1 (f_m(t) - f(t))^2\,dt$$

$$\leq \int_0^1 (f_m(t) - f(t))^2\,dt = ||f_m - f||_2^2 \to 0.$$

Logo, $f(t) = 1$ *se* $t \in [c, 1]$ *para todo* $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, *isto é,* $f(t) = 1$ *se* $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ *Portanto,* $\lim_{t \to \frac{1}{2}+} f(t) = 1 \neq f(\frac{1}{2}) = 0$. *Um absurdo.*

Assim, $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ não é um espaço de Hilbert, mas pelo teorema anterior pode ser visto como um subespaço vetorial denso de algum espaço de Hilbert $(\widehat{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle\hat{\ })$.

O espaço $L^2([0,1])$ é um espaço vetorial que pode ser munido com o produto interno $\langle f,g\rangle_2 = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, sendo que aqui consideramos integral de Lebesgue. Denotaremos, neste exemplo, por $||\cdot||_{L^2}$ a norma associada a este produto interno. Esta norma é a mesma norma $||\cdot||_2$ que foi definida em (1.36). Pelo Teorema 1.53 $(L^2([0,1]), ||\cdot||_{L^2})$ é um espaço de Banach.

É claro $A : X \to L^2([0,1])$ dada por $Af = f$ é injetora e $\langle Af, Ag\rangle_2 = \langle f, g\rangle$, para toda $f, g \in X$ pois as integrais de Lebesgue e Riemann coincidem para as funções de X. Logo, A é um isomorfismo entre os EVPI X e $W \doteq A(X)$.

Mostremos que W é denso em $L^2([0,1])$. Sejam $f \in L^2([0,1])$ e $\varepsilon > 0$.

Suponha por um momento que f seja limitada e tome $N > 0$ tal que $|f(t)| \leq N$ para todo $t \in [0,1]$.

Pelo teorema de Lusin existe um fechado $F \subset [0,1]$ tal que a restrição de f a F, que denotaremos por g, é contínua e a medida de Lebesgue de $[0,1]\setminus F$, $m([0,1]\setminus F)$, é menor do que $\varepsilon^2/8N^2$. Pelo teorema de extensão de Tietze, existe uma função contínua em $[0,1]$, que denotaremos por h, tal que $h = g = f$ em F e $||h||_\infty \leq ||g||_\infty \leq N$.

Temos

$$||f-h||_{L^2}^2 = \int_0^1 (f(t)-h(t))^2\,dt = \int_F (f(t)-h(t))^2\,dt + \int_{[0,1]\setminus F} (f(t)-h(t))^2\,dt$$

$$= \int_{[0,1]\setminus F} (f(t)-h(t))^2\,dt \leq \int_{[0,1]\setminus F} (|f(t)|+|h(t)|)^2\,dt$$

$$\leq 4\int_{[0,1]\setminus F} [(f(t))^2 + (h(t))^2]\,dt \leq 8N^2 m([0,1]\setminus F) < \varepsilon^2.$$

Mostremos agora o casos geral. Sejam $f \in L^2([0,1])$ e $\eta > 0$.

Considere a sequência de funções (f_n) dada por $f_n = f\chi_{\{t\in[0,1]; |f(t)|\leq n\}}$. Temos que f_n é limitada $||f_n||_{L^2} \leq ||f||_{L^2} < \infty$. Além do mais,

$$\lim_{n\to\infty} (f(t)-f_n(t))^2 = \lim_{n\to\infty} (f(t))^2 (1-\chi_{\{t\in[0,1];|f(t)|\leq n\}})^2$$

$$= (f(t))^2 \lim_{n\to\infty} (1 - \chi_{\{t\in[0,1];|f(t)|\leq n\}})^2 = 0$$

para todo $t \in [0,1]$ *e*

$$0 \leq (f - f_n)^2 \leq 4[f^2 + f_n^2] \leq 8f^2 \in L^1([0,1]).$$

Segue do teorema da convergência dominada que

$$||f - f_n||_{L^2} = \int_0^1 (f(t) - f_n(t))^2 \, dt \to 0.$$

Tome n *tal* $||f - f_n||_{L^2} < \eta/2$*. Como* f_n *pertence a* $L^2([0,1])$ *e é limitada, pelo que já foi mostrado, existe uma função contínua* h *definida em* $[0,1]$ *tal que* $||f - h||_{L^2} < \eta/2$*. Assim,*

$$||f - h||_{L^2} \leq ||f - f_n||_{L^2} + ||f_n - h||_{L^2} < \eta.$$

Portanto, $(L^2([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *é o completamento de* $(C([0,1];\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$*.*

Definição 3.21 *Um subconjunto* M *de um espaço vetorial* X *é convexo se para todos* $x, y \in M$ *e* $t \in [0,1]$ *tem-se* $tx + (1-t)y \in M$*.*

Dados $x, y \in X$*, o conjunto* $S = \{tx + (1-t)y; t \in [0,1]\}$ *é chamado de segmento que liga* x *a* y*.*

Todo subespaço vetorial é um conjunto convexo.

Exercício 3.22 *Toda bola aberta ou fechada de um EVN é convexa.*

Exercício 3.23 *O fecho de um conjunto convexo de um EVN é convexo.*

Teorema 3.24 *Sejam* X *um EVPI e* $M \subset X$ *não vazio, convexo e completo. Então, dado* $x \in X$ *existe um único* $y \in M$ *tal que*

$$d(x, M) \doteq \inf\{||x - z||; z \in M\} = ||x - y||.$$

Demonstração:

Seja $\delta = d(x, M)$. Tome $y_n \in M$ tal que $\delta_n \doteq ||x - y_n|| \to \delta$.

Mostremos que (y_n) converge para algum elemento de M. Para isto basta mostrarmos que (y_n) é sequência de Cauchy.

Coloque $v_n = y_n - x$, $||v_n|| = \delta_n$. Para $n, m \in \mathbb{N}$ temos

$$||v_n + v_m|| = ||y_n + y_m - 2x|| = 2||\underbrace{\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m}_{\in M} - x|| \geq 2\delta.$$

Pela identidade do paralelogramo,

$$||y_n - y_m||^2 = ||v_n - v_m||^2 = -||v_n + v_m||^2 + 2(||v_n||^2 + ||v_m||^2)$$
$$\leq -4\delta^2 + 2\delta_n^2 + 2\delta_m^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Seja $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Como $y \in M$ temos $||x - y|| \geq d(x, M) = \delta$. Por outro lado,

$$||x - y|| \leq ||x - y_n|| + ||y_n - y|| = \delta_n + ||y_n - y|| \to \delta.$$

Portanto, $||x - y|| = \delta = d(x, M)$.

Se $z \in M$ também satisfaz $\delta = ||x - z||$ então

$$||y - z||^2 = ||(y - x) + (x - z)||^2 = 2||y - x||^2 + 2||x - z||^2$$
$$-||(y - x) - (x - z)||^2 = 4\delta^2 - 4||\underbrace{(y + z)/2}_{\in M} - x||^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

□

Lema 3.25 *Sejam X um EVPI e $Y \subset X$ um subespaço vetorial completo. Então, dado $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $x - y \perp Y$. Na verdade, y é o único vetor que satisfaz $||x - y|| = d(x, Y)$.*

Demonstração:

Como Y é não vazio, convexo e completo, pelo Teorema 3.24, dado $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $||x - y|| = d(x, Y)$.

Seja $z = x - y$. Coloque $\delta \doteq d(x, Y) = ||z||$. Suponha que $z \not\perp Y$. Assim, existe $y_1 \in Y$ tal que $\beta \doteq \langle z, y_1 \rangle \neq 0$; em particular $y_1 \neq 0$.

Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ temos

$$||z - \alpha y_1||^2 = \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle = ||z||^2 + |\alpha|^2 ||y_1||^2 - \alpha \langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha} \langle z, y_1 \rangle$$
$$= ||z||^2 + \alpha \overline{\alpha} ||y_1||^2 - \alpha \overline{\beta} - \overline{\alpha} \beta = ||z||^2 - \overline{\alpha} \beta + \alpha (\overline{\alpha} ||y_1||^2 - \overline{\beta}).$$

Escolhendo $\alpha = \beta / ||y_1||^2$ obtemos $||z - \alpha y_1||^2 = ||z||^2 - \overline{\alpha} \beta$, isto é,

$$||z - \frac{\beta}{||y_1||^2} y_1||^2 = ||z||^2 - \frac{\overline{\beta}}{||y_1||^2} \beta = ||z||^2 - \frac{|\beta|^2}{||y_1||^2} < ||z||^2 = \delta^2.$$

Observe que

$$z - \frac{\beta}{||y_1||^2} y_1 = x - \underbrace{(y - \frac{\beta}{||y_1||^2} y_1)}_{\doteq y' \in Y} = x - y',$$

portanto,

$$||z - \frac{\beta}{||y_1||^2} y_1||^2 = ||x - y'||^2 \geq \delta^2,$$

um absurdo.

Mostremos a unicidade de y. Se $y_0 \in Y$ for tal que $x - y_0 \perp Y$ então, como $\langle y - x, y \rangle = \langle x - y_0, y_0 \rangle = \langle y - x, y_0 \rangle = \langle x - y_0, y \rangle = 0$,

$$||y - y_0||^2 = ||y - x + x - y_0||^2$$
$$= \langle y - x, y - x \rangle + \langle x - y_0, x - y_0 \rangle + \langle y - x, x - y_0 \rangle + \langle x - y_0, y - x \rangle$$
$$= -\langle y - x, x \rangle + \langle x - y_0, x \rangle + \langle y - x, x \rangle - \langle x - y_0, x \rangle = 0.$$

$\square$

Definição 3.26 *Sejam X um EVPI e $M \subset X$ não vazio. O conjunto dos pontos de X que são ortogonais a todo elemento de M é denotado por $M^\perp$.*

Observação 3.27 *No livro do Kreyszig o conjunto $M^\perp$ é denominado de anulador de M. Esta denominação é mais comum no seguinte sentido: Se X é um EVN e M é um subconjunto não vazio de X então o anulador de X é o conjunto $M^\circ = \{f \in X^*; f(x) = 0, \forall x \in M\}$. Esse outro conceito de anulador também está presente no Kreyszig com o mesmo nome. Lá é* *observado que isto não causa conflito (veja nota de rodapé na página 148 daquele livro).*

Fixado $y \in M^\perp$, defina $f_y : X \to \mathbb{K}$ por $f_y(x) = \langle x, y\rangle$. É claro que f_y é um funcional linear e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|f_y(x)| \leq ||x||\,||y||$, ou seja, $f_y \in X^*$, $||f_y|| \leq ||y||$ (como $f_y(y) = ||y||^2$, segue que $||f_y|| = ||y||$). Agora, para todo $x \in M$, $f_y(x) = \langle x, y\rangle = 0$ pois y é ortogonal a todo elemento de M. Portanto, $f_y \in M^\circ$. Mais adiante veremos no teorema de representação de Riesz que todo funcional linear contínuo definido em um espaço de Hilbert X é da forma f_y para algum $y \in X$; em particular, se $f_y \in M^\circ$ então $y \in M^\perp$.

Proposição 3.28 *Sejam X um EVPI e $M \subset X$ não vazio. Então*

1. *$M^\perp$ é um subespaço vetorial de X fechado de X;*
2. *$M \subset M^{\perp\perp} \doteq (M^\perp)^\perp$.*

Demonstração:

1. Sejam $x, y \in M^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para todo $z \in M$ temos

$$\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle = 0.$$

Se $x_n \in M^\perp$ e $x_n \to x_0 \in X$ então para todo $z \in M$ temos

$$\langle x_0, z\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, z\rangle = 0.$$

2. Dado $x \in M$, para todo $y \in M^\perp$ temos $\langle x, y\rangle = 0$, ou seja, $x \in M^{\perp\perp}$.

□

Teorema 3.29 *Sejam X um espaço de Hilbert e $Y \subset X$ um subespaço vetorial fechado. Então $X = Y \oplus Y^\perp$.*

$Y^\perp$ é chamado de complemento ortogonal de Y.

Demonstração:

Segue das hipóteses que Y é completo; assim, dado $x \in X$, pelo Lema 3.25 existe um único $y \in Y$ tal que $x - y \in Y^\perp$. Colocando $z = x - y$ temos $x = y + z \in Y + Y^\perp$. Logo, $X = Y + Y^\perp$.

Se $z \in Y \cap Y^{\perp}$ então $||z||^2 = \langle z, z\rangle = 0$. Portanto, $X = Y \oplus Y^{\perp}$.

□

Se X e Y são como no Teorema 3.29 definimos a projeção ortogonal de X sobre Y, $P : X \to Y$, por $P(x) = y$, sendo $y \in Y$ o único elemento que satisfaz $x - y \in Y^{\perp}$.

• P é linear: dados $x_1, x_2 \in X$ decompomos $x_j = y_j + z_j$, $y_j \in Y$ e $z_j \in Y^{\perp}$, $j = 1, 2$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ então

$$x_1 + \lambda x_2 = y_1 + z_1 + \lambda(y_2 + z_2) = \underbrace{(y_1 + \lambda y_2)}_{\in Y} + \underbrace{(z_1 + \lambda z_2)}_{\in Y^{\perp}}$$

e daí

$$P(x_1 + \lambda x_2) = y_1 + \lambda y_2 = P(x_1) + \lambda P(x_2).$$

• P é idempotente: se $x = y + z$, $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$ então

$$P^2 x = P(Px) = P(y) = P(y + 0) = y = Px.$$

• P é limitado e $||P|| = 1$ se $Y \neq \{0\}$: se $x = y + z$, $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$ então

$$\begin{aligned} ||Px||^2 = ||y||^2 \leq ||y||^2 + ||z||^2 \\ = ||y||^2 + ||z||^2 + \langle y, z\rangle + \langle z, y\rangle = \langle y + z, y + z\rangle = ||x||^2. \end{aligned}$$

Em particular, $||P|| \leq 1$. Se $Y \neq \{0\}$ tome $v \in Y$ não nulo. Temos $Pv = v \neq 0$. Como

$$||Pv|| = ||P^2 v|| \leq ||P||\, ||Pv||,$$

portanto, $1 \leq ||P||$.

• $\mathscr{R}(P) = Y$: basta ver que para todo $y \in Y$, $Py = y$.

• $\mathscr{N}(P) = Y^{\perp}$: note que

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(P) = \{x \in X; Px = 0\} = \{x = y + z; y \in Y, z \in Y^{\perp}, y = Px = 0\} \\ = \{x = z; z \in Y^{\perp}\} = Y^{\perp}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $X = \mathscr{R}(P) \oplus \mathscr{N}(P)$.

Teorema 3.30 *Sejam X um espaço de Hilbert e $Y \subset X$ um subespaço vetorial fechado. Então $Y = Y^{\perp\perp}$.*

Demonstração:

Pela Proposição 3.28 resta mostrar que $Y^{\perp\perp} \subset Y$.

Seja $x \in Y^{\perp\perp}$ e escreva $x = y + z$ com $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$. Como $Y \subset Y^{\perp\perp}$ temos que $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$. Portanto, $z \in Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = \{0\}$, ou seja, $x = y \in Y$.

$\square$

Dado um subconjunto M não vazio de um espaço vetorial X denotaremos por $\langle M \rangle$ o subespaço vetorial de X gerado por M (também usaremos a notação $[M]$, como já usada na demonstração do Teorema 1.63).

Lema 3.31 *Sejam X um espaço de Hilbert e $M \subset X$ não vazio. São equivalentes*

1. $\overline{\langle M \rangle} = X$
2. $M^{\perp} = \{0\}$

Demonstração:

Suponha que $\langle M \rangle$ seja denso em X.

Seja $x \in M^{\perp}$. Existe uma sequência (x_n) de pontos de $\langle M \rangle$ que converge para x. Cada x_n é da forma $\sum_{k=1}^{m_n} \alpha_k^{(n)} y_k^{(n)}$ com $\alpha_k^{(n)} \in \mathbb{K}$ e $y_k^{(n)} \in M$. Assim,

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x \rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_k^{(n)} y_k^{(n)}, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_k^{(n)} \langle y_k^{(n)}, x \rangle = 0.$$

Portanto, $x = 0$.

Reciprocamente, suponha que $M^{\perp} = \{0\}$.

Como $\overline{\langle M \rangle}$ é fechado, pelo Teorema 3.30, temos

$$X = \overline{\langle M \rangle} \oplus \overline{\langle M \rangle}^{\perp} = \overline{\langle M \rangle} \oplus \{0\} = \overline{\langle M \rangle}.$$

$\square$

Observação 3.32 *Na demonstração acima não foi utilizada a hipótese de X ser completo para mostrarmos que se $\overline{\langle M \rangle} = X$ então $M^{\perp} = \{0\}$.*

3.2 Conjuntos ortonormais

Definição 3.33 *Sejam X um EVPI e $M \subset X$. Dizemos que M é um conjunto ortogonal se para todos $x, y \in M$, $x \neq y$, tem-se $\langle x, y\rangle = 0$. Uma família $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de elementos de X é chamada de família ortogonal se $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$, para todos $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$. Em particular, uma sequência (e_k) de elementos de X é chamada de ortogonal se $\langle e_k, e_j\rangle = 0$ para todos $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$. A mesma definição se aplica para uma sequência finita $(x_1, \ldots, x_n)$.*

M é dito um conjunto ortonormal se for ortogonal e se seus elementos tiverem norma igual a 1. Uma família $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de elementos de X é chamada de família ortonormal se $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in A$. Em particular, uma sequência (e_k) de elementos de X é chamada de ortonormal se $\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{kj}$ para todos $k, j \in \mathbb{N}$. A mesma definição se aplica para uma sequência finita $(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposição 3.34 (Pitágoras) *Se $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma sequência finita ortogonal de elementos de X então $||\sum_{j=1}^n x_j||^2 = \sum_{j=1}^n ||x_j||^2$.*

Demonstração:

$$||\sum_{j=1}^n x_j||^2 = \langle\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{k=1}^n x_k\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^n \langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j=1}^n ||x_j||^2.$$

□

Proposição 3.35 *Se $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma sequência finita ortonormal de elementos de X então $x_1, \ldots, x_n$ são linearmente independentes.*

Demonstração:

Se $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n$ então, para cada $k = 1, \ldots, n$

$$0 = \langle\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle x_j, x_k\rangle = \alpha_k.$$

□

Proposição 3.36 (Desigualdade de Bessel) *Seja* (e_k) *uma sequência ortonormal em um EVPI* X*. Então, para todo* $x \in X$ *temos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Demonstração:

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $y = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$. Coloque $z = x - y$.

Temos

$$\langle z, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \rangle - \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_k, e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 = 0.$$

Assim,

$$||x||^2 = ||z + y||^2 = ||z||^2 + ||y||^2 \geq ||y||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

$\square$

Definição 3.37 *Seja* $(e_k) \in X$ *uma sequência ortonormal em um EVPI* X*. Dado* $x \in X$*, o número* $\langle x, e_k \rangle$ *é chamado de* k*-ésimo coeficiente de Fourier de* x *com relação à sequência ortonormal* (e_k)*.*

Exemplo 3.38 *Sejam* $X = C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ *com o produto interno* $\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt$*, denotando por* $|| \cdot ||_2$ *a norma associada.*

Considere a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *em* X *dada por*

$$e_0(t) = (2\pi)^{-1/2}, \quad e_{2k}(t) = \pi^{-1/2}\cos kt \quad e \quad e_{2k-1}(t) = \pi^{-1/2}\operatorname{sen} kt, \quad k \geq 1.$$

Esta sequência é ortonormal.

Os coeficientes de Fourier a_n*,* $n \geq 0$*, de* $x \in X$ *são*

$$a_0 = \langle x, e_0\rangle = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi} x(t)\,dt, \quad a_{2k} = \langle x, e_{2k}\rangle = \pi^{-1/2}\int_0^{2\pi} x(t)\cos kt\,dt$$

e

$$a_{2k-1}(t) = \langle x, e_{2k-1}\rangle = \pi^{-1/2}\int_0^{2\pi} x(t)\operatorname{sen} kt, \quad k \geq 1.$$

Em particular, se $x(t) = t$*,* $||x||^2 = 8\pi^3/3$*,* $a_0 = \pi\sqrt{2\pi}$*,* $a_{2k} = 0$ *e* $a_{2k-1} = -2\sqrt{\pi}/k$*,* $k \geq 1$*.*

Pela desigualdade de Bessel temos a estimativa

$$2\pi^3 + 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \frac{8}{3}\pi^3,$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}. \tag{3.39}$$

Teorema 3.40 *Seja* (e_k) *uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert* X*. Então*

1. *a série* $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ *converge em* X *se e somente se* $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ *converge;*
2. *se* $x \doteq \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k \in X$ *então* $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$*; logo,* $x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$*;*
3. *para qualquer* $x \in X$ *a série* $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ *converge em* X*.*

Demonstração:

Seja $s_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$.

1. Seja $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$. Se $n > m \geq 1$, segue da ortonormalidade de (e_k) que

$$||s_n - s_m||^2 = ||\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k||^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

Assim, (s_n) é de Cauchy em X se e somente se (σ_n) é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como X e $\mathbb{R}$ são completos, (s_n) converge em X se e somente se (σ_n) converge em $\mathbb{R}$

2. Dado $j \in \mathbb{N}$, para todo $n \geq j$ temos

$$\langle s_n, e_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j.$$

Como $s_n \to x$, pela continuidade do produto interno, segue que

$$\alpha_j = \lim_{n\to\infty} \langle s_n, e_j \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} s_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle.$$

3. A série $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$ converge pela desigualdade de Bessel. Pelo item *1* deste teorema, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ converge em X.

□

No item *3* acima não é necessário que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ convirja para x. Tome como exemplo o $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e os vetores ortonormais $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$. Se $x = (0, 0, 1)$ então $x \neq \sum_{k=1}^{2} \langle x, e_k \rangle e_k$.

Lema 3.41 *Sejam X um EVPI e $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família ortonormal de elementos de X. Dado $x \in X$ temos $\langle x, e_\alpha \rangle \neq 0$ para no máximo uma quantidade enumerável de índices $\alpha \in A$.*

Demonstração:

Sejam $A' = \{\alpha \in A; \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0\}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\alpha \in A; |\langle x, e_\alpha \rangle| > 1/n\}$. Temos,

$$A' = \{\alpha \in A; |\langle x, e_\alpha \rangle| > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mostremos que cada A_n é finito.

Se $A_n = \varnothing$ então A_n é finito.

Suponha que A_n não seja vazio. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in A_n$, $N \geq 1$, com $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$.

Coloque $y = \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_j} \rangle e_{\alpha_j}$ e $z = x - y$.

Procedendo como na demonstração da desigualdade de Bessel (Proposição 3.36) vemos que $\langle z, y \rangle = 0$ e que $||y||^2 \leq ||x||^2$. Mas,

$$||y||^2 = \sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_j} \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{N}{n^2}.$$

Logo, $N \leq n^2 ||y||^2 \leq n^2 ||x||^2$.

Portanto, A_n é finito e, consequentemente, A' é no máximo enumerável.

$\square$

Suponha agora que X seja um espaço de Hilbert. Com a notação do lema acima, para cada x podemos escrever $\{e_\alpha; \alpha \in A'\} = \{e_{\alpha_j}; j \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}\}$ para algum $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ finito ou igual a $\mathbb{N}$. A série (ou soma finita) $\sum_{j \in \mathbb{N}'} \langle x, e_{\alpha_j} \rangle e_{\alpha_j}$ converge em X (veja Teorema 3.40) mas, a princípio, o resultado pode depender da escolha de como ordenamos o conjunto A'. Vejamos que o resultado não depende da escolha da ordenação.

O caso em que A' é finito é trivial.

No caso em que A' é enumerável, escrevemos

$$\{e_\alpha; \alpha \in A'\} = \{f_1, f_2, \dots\} = \{g_1, g_2, \dots\}$$

de modo que $g_n = f_m = f_{\varphi(n)}$ e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, $n \mapsto m = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Coloque $\gamma_n = \langle x, g_n \rangle$, $\beta_m = \langle x, f_m \rangle$, $n, m \geq 1$, $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n g_n$ e $x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m f_m$.

Pelo item *2* do Teorema 3.40, temos $\gamma_n = \langle x_1, g_n \rangle$ e $\beta_m = \langle x_2, f_m \rangle$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, coloque $m = \varphi(n)$. Como $g_n = f_m = f_{\varphi(n)}$,

$$\langle x_1 - x_2, g_n \rangle = \langle x_1, g_n \rangle - \langle x_2, g_n \rangle = \langle x_1, g_n \rangle - \langle x_2, f_m \rangle = \gamma_n - \beta_m$$

$$= \langle x, g_n \rangle - \langle x, f_m \rangle = \langle x, g_n \rangle - \langle x, g_n \rangle = 0.$$

De modo similar, dado $m \in \mathbb{N}$ tomando $n = \varphi^{-1}(m) \in \mathbb{N}$ temos $m = \varphi(n)$ e

$$\langle x_1 - x_2, f_m\rangle = \langle x_1, f_m\rangle - \langle x_2, f_m\rangle = \langle x_1, g_n\rangle - \langle x_2, f_m\rangle = \gamma_n - \beta_m$$
$$= \langle x, g_n\rangle - \langle x, f_m\rangle = \langle x, g_n\rangle - \langle x, g_n\rangle = 0.$$

Assim, pela continuidade do produto interno,

$$||x_1 - x_2||^2 = \langle x_1 - x_2, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n g_n - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m f_m\rangle$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\gamma_n}\langle x_1 - x_2, g_n\rangle - \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\beta_m}\langle x_1 - x_2, f_m\rangle = 0,$$

isto é, $x_1 = x_2$.

Dessa forma, se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família ortonormal de elementos de um espaço de Hilbert X, para cada $x \in X$ fica bem definido $\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$.

Observação 3.42 *Em um EVN uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita convergir incondicionalmente se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ for convergente para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Toda série absolutamente convergente em um espaço de Banach converge incondicionalmente. De fato, como em um espaço de Banach toda série absolutamente convergente é convergente, basta mostrar que se $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ converge e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção então $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{\varphi(n)}||$ converge.

Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ convirja e fixe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $n > m \geq n_0$ então $\sum_{k=m}^{n} ||x_k|| < \varepsilon$.

Seja $N_0 = \max\{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(n_0)\}$. Se $N > M \geq N_0$ então para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $M + 1 \leq n \leq N$ tem-se $n > N_0$ e, portanto, $n \notin \{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(n_0)\}$.

Sejam $K = \min\{\varphi(M+1), \dots, \varphi(N)\}$ e $L = \max\{\varphi(M+1), \dots, \varphi(N)\}$. Temos $K > n_0$. De fato, se $K \leq n_0$ então $\varphi^{-1}(K) \in \{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(n_0)\}$ e, portanto, $\varphi^{-1}(K) \leq N_0$. Mas, como $K = \varphi(j)$ para algum $j \in \{M + 1, \dots, N\}$ teríamos $M < j = \varphi^{-1}(\varphi(j)) = \varphi^{-1}(K) \leq N_0$, um absurdo pois $M \geq N_0$.

Como $L \geq K > n_0$, $\sum_{n=M+1}^{N} ||x_{\varphi(n)}|| \leq \sum_{j=K}^{L} ||x_j|| < \varepsilon$.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{\varphi(n)}||$ converge, como queríamos.

Exemplo 3.43 *Considere no espaço de Hilbert* $\ell^2(\mathbb{K})$ *a sequência* (e_n) *dada por* $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$. *É claro que* (e_n) *é ortonormal.*

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ *converge em* $\ell^2(\mathbb{K})$ *pois* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente. Por outro lado,* $\sum_{n=1}^{\infty} ||\frac{1}{n} e_n||_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge, ou seja,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ *não é absolutamente convergente.*

Definição 3.44 *Sejam* X *um EVPI e* $M \subset X$ *um conjunto (ou família ou sequência) ortonormal. Dizemos que* M *é total, fundamental ou completo se* $\overline{\langle M \rangle} = X$.

Note que pela Observação 3.32 temos que se M é um conjunto ortonormal em um EVPI X então $M^{\perp} = \{0\}$. No caso de X ser Hilbert então, pelo Lema 3.31, a condição $M^{\perp} = \{0\}$ equivale a M ser total.

Exemplo 3.45 *Considere no espaço de Hilbert* $\ell^2(\mathbb{K})$ *a sequência* (e_n) *dada por* $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$, *como acima.*

Seja $x = (x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell^2(\mathbb{K})$ *que é ortogonal a todo* e_n, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *isto é,*

$$0 = \langle x, e_n \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \langle e_k, e_n \rangle = x_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Logo,* x *é a sequência nula e, consequentemente,* (e_n) *é uma sequência total.*

Teorema 3.46 (Identidade de Parseval) *Sejam* X *um espaço de Hilbert e* $M = \{e_\alpha; \alpha \in A\}$ *uma família ortonormal de* X. *São equivalentes*

a) M *é total;*

b) para cada $x \in X$ *tem-se* $\sum_{\alpha\in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = ||x||^2$ *(identidade de Parseval);*

c) para cada $x \in X$ *tem-se* $x = \sum_{\alpha\in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.

Demonstração:

Antes de começarmos a demonstração, lembremos que para cada $x \in X$, $\sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$ é uma soma finita ou uma série no sentido usual, ou seja, limite de uma sequência de reduzidas.

$b \Rightarrow a$

Suponha que M não seja total. Então existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $x \perp M$, ou seja, $||x|| > 0$ e $\langle x, e_\alpha \rangle = 0$ para todo $\alpha \in A$. Portanto, não vale a identidade de Parseval pois

$$0 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 < ||x||^2.$$

$a \Rightarrow c$

Suponha que M seja total. Dado $x \in X$ seja $y = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$. Para cada $\beta \in A$ temos

$$\langle x - y, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \langle y, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \langle \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha, e_\beta \rangle$$

$$= \langle x, e_\beta \rangle - \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \langle x, e_\beta \rangle = 0.$$

Portanto, $x - y \perp M$. Como M é total, $x - y = 0$, isto é,

$$x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha.$$

$c \Rightarrow b$

Se $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$ então

$$||x||^2 = \langle \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha, \sum_{\beta \in A} \langle x, e_\beta \rangle e_\beta \rangle$$

$$= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in A} \langle x, e_\alpha \rangle \overline{\langle x, e_\beta \rangle} \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2.$$

$\square$

O próximo resultado será que todo espaço de Hilbert não trivial possui um conjunto ortonormal completo. Para demonstrar isso precisaremos utilizar o lema de Zorn. Recordemos alguns conceitos.

- Um conjunto parcialmente ordenado é um par ordenado $(X, \leq)$ consistindo de um conjunto X e uma relação de ordem parcial $\leq$, isto é, uma relação binária em X que satisfaz
  1. para todo $x \in X$, $x \leq x$
  2. se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$
  3. se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$
- Uma cadeia em X (ou subconjunto totalmente ordenado) é um subconjunto $Y \subset X$ tal que para todos $y_1, y_2 \in Y$ tem-se $y_1 \leq y_2$ ou $y_2 \leq y_1$.
- Um limitante superior de um subconjunto $M \subset X$ é um elemento $u \in X$ que satisfaz $x \leq u$ para todo $x \in M$.
- Um elemento maximal de X é um elemento $x_0 \in X$ tal que se $x \in X$ e $x_0 \leq x$ então $x_0 = x$.

Lema 3.47 (Lema de Zorn) *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, $X \neq \varnothing$. Suponha que toda cadeia de X tenha um limitante superior. Então X possui um elemento maximal.*

Teorema 3.48 *Todo espaço de Hilbert de dimensão maior ou igual a um possui um conjunto ortonormal completo (total).*

Demonstração:

Seja $\mathscr{F} = \{\mathscr{O} \subset X; \mathscr{O} \text{ é ortonormal}\}$.

Como existe $u \neq 0$ em X então $\{u/||u||\} \in \mathscr{F}$, ou seja, $\mathscr{F} \neq \varnothing$.

Equipe $\mathscr{F}$ com a relação de ordem parcial dada pela inclusão $\subset$.

Se $\mathscr{F}' = \{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathscr{F}$ é uma cadeia então $\mathscr{O} \doteq \cup_{\alpha \in A} \mathscr{O}_\alpha \in \mathscr{F}$. De fato, dados $x, y \in \mathscr{O}$ existem $\alpha, \beta \in A$ tais que $x \in \mathscr{O}_\alpha$ e $y \in \mathscr{O}_\beta$ e como $\mathscr{F}'$ é uma cadeia, vale $\mathscr{O}_\alpha \subset \mathscr{O}_\beta$ ou $\mathscr{O}_\beta \subset \mathscr{O}_\alpha$. Dessa forma, $x, y \in \mathscr{O}_\gamma$ com $\gamma = \beta \in A$ ou $\alpha \in A$, respectivamente. Como $\mathscr{O}_\gamma$ é ortonormal, $\langle x, y \rangle = \delta_{xy}$, isto é, $\mathscr{O}$ é um subconjunto ortonormal de X.

Como $\mathscr{O}_\alpha \subset \mathscr{O}$ para todo $\alpha \in A$, $\mathscr{O}$ é um limitante superior para a cadeia $\mathscr{F}'$. Pelo lema de Zorn, $\mathscr{F}$ tem um elemento maximal $M \in \mathscr{F}$.

Se M não fosse total então teríamos $M^{\perp} \neq \{0\}$. Nestas circunstâncias, existiria $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $x \perp M$. Sejam $u = x/||x||$ e $M' = M \cup \{u\}$. Claramente M' é ortonormal e $M \subsetneq M'$. Absurdo, pois M é maximal. Portanto, M é completo (total).

□

Definição 3.49 *Um conjunto (ou família) ortonormal total de um espaço de Hilbert é chamado de base de Hilbert (hilbertiana ou ortonormal) de X.*

Observação 3.50 *Pelo Teorema 3.46, se $\mathscr{B} = \{e_\alpha; \alpha \in A\}$ é uma base de Hilbert de X então para cada $x \in X$ tem-se $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.*

Observação 3.51 *A sequência de funções trigonométricas do Exemplo 3.38 formam uma base de Hilbert para o espaço de Hilbert $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R})$. A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, no livro Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais de Djairo Guedes de Figueiredo, Projeto Euclides, (1977).*

Note que com este resultado a desigualdade (3.39) *é, na verdade, uma igualdade pois vale a identidade de Parseval.*

Exemplo 3.52 *Conforme visto no Exemplo 3.45, a sequência (e_n) dada por $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$ é total, ou seja, é uma base hilbertiana de $\ell^2(\mathbb{K})$.*

Teorema 3.53 *Todas as bases hilbertianas de um mesmo espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração:

Seja X um espaço de Hilbert.

Se X tem dimensão finita então toda base do espaço vetorial X tem o mesmo número de elementos, digamos, n. Como os elementos de um conjunto ortonormal são linearmente independentes, toda base hilbertiana de X tem no máximo n elementos. Se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base de Hilbert, então, como todo subespaço de dimensão finita é fechado, temos

$$X = \overline{[e_1, \ldots, e_m]} = [e_1, \ldots, e_m].$$

Portanto, $m = n$.

Assuma que X tenha dimensão infinita. Logo, qualquer conjunto ortonormal finito de X não pode gerar X. Assim, qualquer base hilbertiana de X tem infinitos elementos.

Vamos utilizar o seguinte resultado de teoria dos conjuntos: se Λ é um conjunto infinito e $\{\mathscr{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de conjuntos com cardinalidade no máximo enumerável então a cardinalidade de $\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$ é no máximo igual à cardinalidade de Λ.

Sejam $\mathscr{A} = \{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\mathscr{B} = \{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ bases hilbertianas de X.

Note que $\Phi : \Lambda \to \mathscr{A}$ dada por $\Phi(\lambda) = a_\lambda$ é uma bijeção. De fato, é imediato que Φ é sobrejetora; se $\lambda, \mu \in \Lambda$ com $\lambda \neq \mu$ então $\langle a_\lambda, a_\mu\rangle = 0$ e, consequentemente, $\Phi(\lambda) = a_\lambda \neq a_\mu = \Phi(\mu)$ pois, caso contrário, teríamos $\langle a_\lambda, a_\mu\rangle = 1$. Assim, $\mathscr{A}$ e Λ têm a mesma cardinalidade, $\#\mathscr{A} = \#\Lambda$. Analogamente, $\#\mathscr{B} = \#\Gamma$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ defina $\mathscr{B}_\lambda = \{b_\gamma \in \mathscr{B}; \langle a_\lambda, b_\gamma\rangle \neq 0\}$

Afirmação: para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $b_\gamma \in \mathscr{B}_\lambda$. De fato, caso isto não acontecesse existiria $\gamma \in \Gamma$ tal que $\langle a_\lambda, b_\gamma\rangle = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, isto é, $b_\gamma \perp \mathscr{A}$. Mas como $\mathscr{A}$ é total deveríamos ter $b_\gamma = 0$, o que é um absurdo pois $||b_\gamma|| = 1$.

Pelo Lema 3.41, $\mathscr{B}_\lambda$ é no máximo enumerável.

Como $\mathscr{B} = \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$, temos que $\#\mathscr{B} \leq \#\Lambda = \#\mathscr{A}$. Do mesmo modo se mostra que $\#\mathscr{A} \leq \#\mathscr{B}$.

$\square$

Definição 3.54 *A dimensão de Hilbert de um espaço de Hilbert $X \neq \{0\}$ é a cardinalidade de uma de suas bases hilbertianas. A dimensão do espaço de Hilbert trivial é zero.*

Teorema 3.55 *Os espaços de Hilbert $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ e $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ são isomorfos (veja Definição 3.18) se e somente se têm a mesma dimensão de Hilbert.*

Demonstração:

O caso em que $X_1 = \{0\}$ ou $X_2 = \{0\}$ é trivial.

Suponha que $X_1 \neq \{0\}$ e $X_2 \neq \{0\}$.

Suponha que exista um isomorfismo $T : (X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Seja $\mathscr{B}_1 = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma base de Hilbert de X_1. Mostremos que $\mathscr{B}_2 = \{Tx_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma base de Hilbert de X_2.

Como $\langle Tx_\alpha, Tx_\beta \rangle_2 = \langle x_\alpha, x_\beta \rangle_1 = \delta_{\alpha\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in A$, segue que $\mathscr{B}_2$ é ortonormal.

Seja $y \in X_2$ tal que $y \perp \mathscr{B}_2$. Tome $x \in X_1$ tal que $y = Tx$.

Para todo $\alpha \in A$,

$$\langle x, x_\alpha \rangle_1 = \langle Tx, Tx_\alpha \rangle_2 = \langle y, Tx_\alpha \rangle_2 = 0.$$

Como $\mathscr{B}_1$ é total, $x = 0$. Logo, $y = Tx = 0$. Ou seja, $\mathscr{B}_2$ é total. Portanto, uma base de Hilbert de X_2.

Claramente, $\#\mathscr{B}_1 = \#A = \#\mathscr{B}_2$.

Reciprocamente, sejam $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ bases de Hilbert de X_1 e X_2, respectivamente. Por hipótese $\#\mathscr{B}_1 = \#\mathscr{B}_2$. Dessa forma, podemos indexar estes dois conjuntos com um mesmo conjunto de índices A. Assim, podemos escrever $\mathscr{B}_1 = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathscr{B}_2 = \{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Dado $x \in X_1$ temos $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle_1 x_\alpha$ e $\sum_{\alpha \in A} |\langle x, x_\alpha \rangle_1|^2 < \infty$. Pelo item *1* do Teorema 3.40, a série $\sum_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle_1 y_\alpha$ converge para algum elemento de X_2.

Defina $T : X_1 \to X_2$ por $Tx = \sum_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle_1 \, y_\alpha$. Note que $Tx_\beta = y_\beta$, para todo $\beta \in A$.

T é linear pois o produto interno é uma função linear na primeira variável.

Para todo $x \in X_1$,

$$||Tx||_2^2 = \langle \sum_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle_1 \, y_\alpha, \sum_{\beta \in A} \langle x, x_\beta \rangle_1 \, y_\beta \rangle_2$$

$$= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in A} \langle x, x_\alpha \rangle_1 \overline{\langle x, x_\beta \rangle_1} \langle y_\alpha, y_\beta \rangle_2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, x_\alpha \rangle_1|^2 = ||x||_1^2.$$

Segue da identidade de polarização que $\langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ para todos $x, y \in X_1$.

Resta mostrar que T é sobrejetora.

Dado $y \in X_2$ podemos escrever $y = \sum_{\alpha \in A} \langle y, y_\alpha \rangle_2 \, y_\alpha$.

Como $\sum_{\alpha\in A} |\langle y, y_\alpha\rangle_2|^2 < \infty$, novamente pelo item *1* do Teorema 3.40, a série $\sum_{\alpha\in A}\langle y, y_\alpha\rangle_2\, x_\alpha$ converge para algum elemento $x \in X_1$.

Temos

$$Tx = \sum_{\alpha\in A}\langle x, x_\alpha\rangle_1\, y_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\langle\sum_{\beta\in A}\langle y, y_\beta\rangle_2\, x_\beta, x_\alpha\rangle_1 y_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in A}\langle y, y_\beta\rangle_2\langle x_\beta, x_\alpha\rangle_1 y_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\langle y, y_\alpha\rangle_2\, y_\alpha = y.$$

□

Vejamos agora certas classes de espaços de Hilbert que possuem bases de Hilbert enumeráveis.

Definição 3.56 *Um espaço topológico é separável se possuir um subconjunto denso enumerável.*

Teorema 3.57 *Seja X um espaço de Hilbert. Tem-se*

1. *se X é separável então toda base de Hilbert de X é no máximo enumerável;*
2. *se X possuir uma sequência total então X é separável.*

Demonstração:

1. Sejam $D \subset X$ enumerável e denso e $\mathscr{B}$ uma base de Hilbert de X.

Se $x, y \in \mathscr{B}$ e $x \neq y$ então $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 = 2$. Ou seja, $||x-y|| = \sqrt{2}$.

Segue da desigualdade triangular que as bolas abertas $B_x \doteq B(x, \sqrt{2}/3)$ e $B_y \doteq B(y, \sqrt{2}/3)$ são disjuntas. Como D é denso em X, existem $d_x, d_y \in D$ tais que $d_x \in B_x$ e $d_y \in B_y$. Portanto, $d_x \neq d_y$.

Se $\mathscr{B}$ fosse não enumerável teríamos uma quantidade não enumerável de bolas abertas disjuntas, cada uma delas contendo um elemento distinto de D, que é enumerável. Impossível.

2. Seja (e_n) uma sequência total em X. Seja A o conjunto das combinações lineares com coeficientes em $\mathbb{Q}$ ou em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, dependendo da natureza de $\mathbb{K}$, dos termos da sequência (e_n). Ou seja, $x \in A$ se $x = r_1e_1 + \cdots + r_ne_n$ com $r_1, \ldots, r_n$ pertencentes a $\mathbb{Q}$ ou a $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

O conjunto A é enumerável. Mostremos que A é denso em X. Seguirá que X é separável.

Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Como $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $||x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k|| < \varepsilon/2$.

Como $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ e $\overline{(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^n} = \mathbb{C}^n$ existem $\gamma_k^{(n)} \in \mathbb{Q}$ ou em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $k = 1, \ldots, n$, tais que $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle - \gamma_k^{(n)}|^2 < \varepsilon^2/4$.

Seja $v = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k \in A$. Temos

$$||x - v|| = ||x - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k||$$

$$\leq ||x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k|| + ||\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k||$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + ||\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k\rangle - \gamma_k^{(n)}) e_k|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle - \gamma_k^{(n)}|^2)^{1/2} < \varepsilon.$$

□

Corolário 3.58 *Seja X um espaço de Hilbert. A fim de que X seja separável é necessário e suficiente que sua dimensão de Hilbert seja no máximo enumerável.*

Observação 3.59 *Vimos no Exemplo 3.52 que $\ell^2(\mathbb{K})$ possui uma base hilbertiana enumerável. Pelo item 2 do Teorema 3.57, $\ell^2(\mathbb{K})$ é separável.*

Se X é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ separável e de dimensão infinita então pelo item 1 do Teorema 3.57, X possui uma base de Hilbert que é necessariamente enumerável. Pelo Teorema 3.55 X e $\ell^2(\mathbb{K})$ são isomorfos como espaços de Hilbert.

No caso em que X for de dimensão finita então X e $\mathbb{K}^n$ são isomorfos como espaços de Hilbert.

Exercício 3.60 *Seja $\mathscr{F}$ o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam fora de um conjunto no máximo enumerável.*

Se $f \in \mathscr{F}$ podemos escrever

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\} = \{x_j; j \in \mathbb{N}_f\}$$

com $\mathbb{N}_f \subset \mathbb{N}$ finito ou igual a $\mathbb{N}$. Podemos assim definir a soma

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} (f(x))^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}_f} (f(x_j))^2.$$

Note que mesmo quando $\mathbb{N}_f$ for igual a $\mathbb{N}$, a soma fica bem definida qualquer que seja a enumeração que fizermos do conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ pois $(f(x))^2 \geq 0$.

Seja

$$\Lambda^2(\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{F}; \sum_{j \in \mathbb{N}_f} (f(x_j))^2 < \infty\}$$

e defina para $f \in \Lambda^2(\mathbb{R})$

$$||f||_2 = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_f} (f(x_j))^2 \right)^{1/2}.$$

Mostre que $(\Lambda^2(\mathbb{R}), || \cdot ||_2)$ é um espaço vetorial completo.

Mostre que $|| \cdot ||_2$ é proveniente de um produto interno. Portanto, $\Lambda^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert.

Para cada $y \in \mathbb{R}$ considere a função f_y dada por $f_y(x) = \delta_{xy}$. Mostre que se $y \neq z$ então $||f_y - f_z||_2 = \sqrt{2}$. Conclua que, como $\{f_y; y \in \mathbb{R}\}$ não é enumerável, $\Lambda^2(\mathbb{R})$ não é separável e, portanto, não possui base de Hilbert enumerável (nem finita, obviamente).

3.3 Teorema da representação de Riesz

Sejam X um EVPI e $z \in X$. O funcional linear $f_z(x) = \langle x, z \rangle$ é limitado pois, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|f_z(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq ||x|| \, ||z||.$$

Em particular, $||f_z|| \leq ||z||$. Mais ainda, se $z = 0$ então $||f_z|| = 0 = ||z||$ e se $z \neq 0$ então $f_z(z/||z||) = ||z||$, o que implica em $||f_z|| = ||z||$.

O teorema da representação de Riesz nos diz que a recíproca é verdadeira quando consideramos espaços de Hilbert, isto é, todo funcional limitado em um espaço de Hilbert é da forma f_z para algum z neste espaço.

Teorema 3.61 (Teorema da representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hilbert. Dado $f \in X^*$ existe um único $z \in X$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$ para todo $x \in X$. Além do mais, $||f|| = ||z||$.*

Demonstração:

O caso em que $f = 0$ basta tomar $z = 0$.

Suponha que $f \neq 0$. Logo $\mathscr{N}(f) \neq X$.

Como f é contínuo e $\mathscr{N}(f) = f^{-1}(\{0\})$, o núcleo de f é fechado e, portanto, $\mathscr{N}(f) = \mathscr{N}(f)^{\perp\perp}$ (Teorema 3.30). Assim, $\mathscr{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$ pois, caso contrário, $\mathscr{N}(f) = \{0\}^{\perp} = X$.

Tome $z_0 \in \mathscr{N}(f)^{\perp}$, $z_0 \neq 0$. Note que $f(z_0) \neq 0$.

Dado $x \in X$ coloque $v = x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0$.

Como

$$f(v) = f(x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z_0)} f(z_0) = 0,$$

segue que $v \in \mathscr{N}(f)$.

Como $z_0 \perp \mathscr{N}(f)$ e $v \in \mathscr{N}(f)$,

$$0 = \langle v, z_0 \rangle = \langle x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0, z_0 \rangle = \langle x, z_0 \rangle - \frac{f(x)}{f(z_0)} ||z_0||^2,$$

isto é,

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \langle x, z_0 \rangle = \langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{||z_0||^2} z_0 \rangle = \langle x, z \rangle, \tag{3.62}$$

com $z = \overline{f(z_0)} z_0 / ||z_0||^2 \neq 0$.

Se também tivéssemos $z' \in X$ tal que $\langle x, z' \rangle = \langle x, z \rangle$, isto é $\langle x, z' - z \rangle = 0$ para todo $x \in X$ então tomando $x = z' - z$ chegaríamos a $||z' - z||^2 = 0$, isto é, $z' = z$.

Por (3.62) e Cauchy-Schwarz, $||f|| \leq ||z||$. Por outro lado, $f(z/||z||) = ||z||$, o que implica em $||f|| = ||z||$.

□

Observação 3.63 *Sejam $X, f \neq 0$ e z como no Teorema da representação de Riesz. Segue da demonstração que $X = \mathscr{N}(f) \oplus [z]$.*

Observação 3.64 *Considere $A : X^* \to X$ dada por $A(f) = z$, sendo $z = z(f)$ o único vetor em X tal que $f(x) = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in X$. Assim, $f(x) = \langle x, A(f)\rangle$ para todo $x \in X$. Além do mais $||A(f)|| = ||f||$.*

Sejam $f, g \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para todo $x \in X$ temos

$$\begin{aligned}\langle x, A(f+\lambda g)\rangle &= (f+\lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = \langle x, A(f)\rangle + \lambda\langle x, A(g)\rangle \\ &= \langle x, A(f)\rangle + \langle x, \overline{\lambda} A(g)\rangle = \langle x, A(f) + \overline{\lambda} A(g)\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle x, A(f) + \overline{\lambda} A(g) - A(f+\lambda g)\rangle = 0$$

para todo $x \in X$. Em particular, tomando $x = A(f) + \overline{\lambda} A(g) - A(f+\lambda g)$ vemos que

$$A(f+\lambda g) = A(f) + \overline{\lambda} A(g).$$

Observação 3.65 *Note que o vetor não nulo z (supondo $f \neq 0$) é ortogonal a $\mathscr{N}(f)$. No caso particular em que X é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e $z = (a, b, c)$ temos $\mathscr{N}(f) = \{(x, y, z); ax + by + cz = 0\}$.*

Observação 3.66 *No caso em que X é um EVPI de dimensão finita o vetor z do teorema acima é dado da seguinte maneira: fixada uma base ordenada ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de X o vetor procurado é dado por $z = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(e_k)} e_k$.*

De fato, dado $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ temos

$$f(x) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(e_j)$$

e

$$\langle x, z\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^{n} \overline{f(e_k)} e_k \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j f(e_k) \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(e_j).$$

A unicidade mostra que z independe da base ortonormal escolhida.

Definição 3.67 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma função $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear se forem satisfeitas*

1. $h(x_1 + \lambda x_2, y) = h(x_1, y) + \lambda h(x_2, y)$ *para todos* $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $h(x, y_1 + \lambda y_2) = h(x, y_1) + \overline{\lambda} h(x, y_2)$ *para todos* $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$

O prefixo sesqui significa um e meio. Uma forma sesquilinear é uma função linear na primeira variável e cumpre apenas metade das condições para ser linear na segunda variável.

Um produto escalar em X é uma forma linear em $X \times X$.

Definição 3.68 *Se X e Y forem EVN dizemos que a forma sesquilinear $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ é limitada se existir $C > 0$ tal que $|h(x,y)| \leq C||x||_X||y||_Y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.*

Neste caso define-se

$$||h|| = \sup_{\substack{x \in X \setminus \{0\} \\ y \in Y \setminus \{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{||x||_X||y||_Y}. \tag{3.69}$$

Exercício 3.70 *Mostre que*

1. *o conjunto $\mathscr{S}(X \times Y)$ das formas sesquilineares em $X \times Y$ munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções é um espaço vetorial;*
2. $|| \cdot ||$ *definida em* (3.69) *define uma norma em* $\mathscr{S}(X \times Y)$*;*
3. $(\mathscr{S}(X \times Y), || \cdot ||)$ *é um espaço de Banach.*

Exercício 3.71 *Sejam X e Y EVN e $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Defina em $X \times Y$ a norma da soma, isto é, $||(x,y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$. Mostre que h é contínua se e somente se h é limitada.*

Temos o seguinte teorema de representação de forma sesquilinear limitada:

Teorema 3.72 *Sejam* $(X, ||\cdot||_X)$ *um EVN,* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *um espaço de Hilbert e* $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ *uma forma sesquilinear limitada.*

Então existe um único operador linear limitado $S : X \to Y$ *tal que* $h(x, y) = \langle Sx, y\rangle_Y$ *para todo* $(x, y) \in X \times Y$.

Além do mais, $||h|| = ||S||$.

Demonstração:

Considere para cada $x \in X$ a função

$$\begin{aligned} f_x :&Y \to \mathbb{K} \\ &y \mapsto \overline{h(x,y)} \end{aligned}$$

• f_x é um funcional linear

Se $y_1, y_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então

$$\begin{aligned} f_x(y_1 + \lambda y_2) &= \overline{h(x, y_1 + \lambda y_2)} = \overline{h(x, y_1)} + \overline{\overline{\lambda} h(x, y_2)} \\ &= \overline{h(x, y_1)} + \lambda \overline{h(x, y_2)} = f_x(y_1) + \lambda f(y_2). \end{aligned}$$

• f_x é limitado

Dado $y \in Y$ temos

$$|f_x(y)| = |\overline{h(x,y)}| = |h(x,y)| \leq ||h||\,||x||_X\,||y||_Y,$$

portanto, $||f_x|| \leq ||h||\,||x||_X$.

Pelo teorema da representação de Riesz, existe um único $z_x \in Y$ tal que

$$f_x(y) = \overline{h(x,y)} = \langle y, z_x\rangle_Y, \quad \forall y \in Y.$$

Assim, $h(x, y) = \overline{\langle y, z_x\rangle_Y} = \langle z_x, y\rangle_Y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Definindo

$$\begin{aligned} S :&X \to Y \\ &x \mapsto Sx \doteq z_x \end{aligned}$$

temos $\langle Sx, y\rangle_Y = h(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

- S é linear

Para todos $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $y \in Y$,

$$\begin{aligned}\langle S(x_1+\lambda x_2), y\rangle_Y &= h(x_1+\lambda x_2, y) = h(x_1,y)+\lambda h(x_2,y)\\ &= \langle Sx_1, y\rangle_Y + \lambda\langle Sx_2, y\rangle_Y = \langle Sx_1+\lambda Sx_2, y\rangle_Y,\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle S(x_1+\lambda x_2)-(Sx_1+\lambda Sx_2), y\rangle_Y = 0,$$

para todo $y \in Y$.

Tomando $y = S(x_1+\lambda x_2)-(Sx_1+\lambda Sx_2)$, obtemos

$$S(x_1+\lambda x_2) = Sx_1+\lambda Sx_2.$$

- S é limitado

Se $S \equiv 0$, é evidente.

Suponha $S \not\equiv 0$. Temos

$$\begin{aligned}||h|| &= \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{||x||_X||y||_Y} = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|\langle Sx,y\rangle_Y|}{||x||_X||y||_Y} \geq \sup_{\substack{x\in X\\ Sx\neq 0}} \frac{|\langle Sx,Sx\rangle_Y|}{||x||_X||Sx||_Y}\\ &= \sup_{\substack{x\in X\\ Sx\neq 0}} \frac{||Sx||_Y}{||x||_X} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Sx||_Y}{||x||_X} = ||S||.\end{aligned}$$

Portanto, $||S|| \leq ||h||$ e, por outro lado,

$$\begin{aligned}||h|| &= \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{||x||_X||y||_Y} = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|\langle Sx,y\rangle_Y|}{||x||_X||y||_Y}\\ &\leq \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{||Sx||_Y||y||_Y}{||x||_X||y||_Y} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Sx||_Y}{||x||_X} = ||S||,\end{aligned}$$

isto é, $||h|| = ||S||$.

- S é único

Suponha que $S' : X \to Y$ tenha as mesmas propriedades de S. Em particular, $\langle Sx, y\rangle_Y = \langle S'x, y\rangle_Y$ para todo $(x,y) \in X\times Y$, ou seja, $\langle Sx - S'x, y\rangle_Y = 0$ para todo $(x,y) \in X\times Y$. Para cada $x \in X$, tomando $y = Sx - S'x$ obtemos $S = S'$.

□

3.4 Adjunto (de Hilbert) de um operador

Definição 3.73 *Sejam* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ *e* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espaços de Hilbert e* $T \in \mathscr{B}(X,Y)$*. O adjunto (ou adjunto de Hilbert) de* T *é uma função* $T^* : Y \to X$ *tal que* $\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, T^*y\rangle_X$ *para todos* $x \in X$ *e* $y \in Y$*.*

Na Seção 6.3 será dada uma noção de adjunto para operadores $T : X \to Y$ entre EVN. Neste caso, o adjunto será um operador linear $T' : Y^* \to X^*$.

Lema 3.74 *Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *com produto interno,* $T : X \to Y$ *e* $S : Y \to X$ *operadores lineares.*

1. *Se* $\langle Tx, y\rangle_Y = 0$ *para todos* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *então* $T = 0$*.*
2. *Se* $\langle x, Sy\rangle_X = 0$ *para todos* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *então* $S = 0$*.*

Demonstração:

1. Basta ver que para cada $x \in X$ temos

$$||Tx||_Y^2 = \langle Tx, Tx\rangle_Y = 0.$$

2. Basta ver que para cada $y \in Y$ temos

$$||Sy||_X^2 = \langle Sy, Sy\rangle_X = 0.$$

$\square$

Lema 3.75 *Sejam* X *um espaço vetorial complexo com produto interno e* $T : X \to X$ *um operador linear tal que* $\langle Tx, x\rangle = 0$ *para todo* $x \in X$*. Então* $T = 0$*.*

Demonstração:

Para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$0 = \langle T(\lambda x + y), \lambda x + y\rangle = |\lambda|^2\langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + \lambda\langle Tx, y\rangle + \overline{\lambda}\langle Ty, x\rangle$$
$$= \lambda\langle Tx, y\rangle + \overline{\lambda}\langle Ty, x\rangle$$

Tomando $\lambda = 1$ e depois $\lambda = i$ temos

$$\begin{cases} \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0 \\ \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = 0.$$

Em particular, para cada $x \in X$ tomando $y = Tx$ obtemos $Tx = 0$, isto é, $T \equiv 0$.

$\square$

Note que lema acima não é verdadeiro no caso do espaço vetorial ser real. Basta tomar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como sendo a rotação de 90º graus.

Teorema 3.76 *O adjunto de um operador linear limitado existe e é único. Além do mais, é um operador linear limitado com norma igual ao do operador dado.*

Demonstração:

Seja $T : X \to Y$ um operador linear limitado entre espaços de Hilbert.

• Existência

Se $T = 0$, $T^* = 0$ satisfaz a condição desejada.

Suponha que $T \neq 0$.

Defina a forma sesquilinear

$$\begin{aligned} h :&Y \times X \to \mathbb{K} \\ &(y, x) \mapsto \langle y, Tx\rangle_Y \end{aligned}$$

Também, $|h(y, x)| \leq ||T||\,||x||_X\,||y||_Y$.

Logo, h é limitada e $||h|| \leq ||T||$. Por outro lado

$$||h|| = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{||x||_X||y||_Y} = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|\langle y, Tx\rangle_Y|}{||x||_X||y||_Y} \geq \sup_{\substack{x\in X\\ Tx\neq 0}} \frac{\langle Tx, Tx\rangle_Y}{||x||_X||Tx||_Y}$$

$$= \sup_{\substack{x\in X\\ Sx\neq 0}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = ||T||.$$

isto é, $||h|| = ||T||$.

Pelo Teorema 3.72 existe um único operador linear limitado $T^* : Y \to X$ satisfazendo $h(y,x) = \langle T^*y, x\rangle_X$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Além do mais $||T^*|| = ||h|| = ||T||$.

Temos

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \overline{\langle y, Tx\rangle_Y} = \overline{h(y,x)} = \overline{\langle T^*y, x\rangle_X} = \langle x, T^*y\rangle_X$$

para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

• Unicidade

Se $S : Y \to X$ também satisfaz as propriedades de T^* então para todo $y \in Y$

$$\begin{aligned} ||Sy - T^*y||^2 &= \langle Sy - T^*y, Sy - T^*y\rangle_X \\ &= \langle Sy - T^*y, Sy\rangle_X - \langle Sy - T^*y, T^*y\rangle_X \\ &= \langle T(Sy - T^*y), y\rangle_Y - \langle T(Sy - T^*y), y\rangle_Y = 0. \end{aligned}$$

□

Valem as seguintes propriedades básicas:

Teorema 3.77 *Sejam X, Y espaços de Hilbert e $S, T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Tem-se*

1. $\langle T^*y, x\rangle_X = \langle y, Tx\rangle_Y$ *para todos* $x \in X$ *e* $y \in Y$
2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$
4. $(T^*)^* = T$
5. $||T^*T|| = ||TT^*|| = ||T||^2$
6. $T^*T = 0$ *se e somente se* $T = 0$
7. *se Z é um espaço de Hilbert e $R \in \mathscr{B}(Y,Z)$ então* $(RT)^* = T^*R^*$

Demonstração:

1. Para todos $x \in X$ e $y \in Y$

$$\langle T^*y, x\rangle_X = \overline{\langle x, T^*y\rangle_X} = \overline{\langle Tx, y\rangle_Y} = \langle y, Tx\rangle_Y.$$

2. Para todos $x \in X$ e $y \in Y$

$$\langle x, (S+T)^* y \rangle_X = \langle (S+T)x, y \rangle_Y = \langle Sx, y \rangle_Y + \langle Tx, y \rangle_Y$$

$$= \langle x, S^* y \rangle_X + \langle x, T^* y \rangle_X = \langle x, (S^* + T^*) y \rangle_X,$$

portanto,

$$\langle x, [S^* + T^* - (S+T)^*] y \rangle_X = 0.$$

Segue do Lema 3.74 que $(S+T)^* = S^* + T^*$.

3. Para todos $x \in X$ e $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\langle x, (\lambda T)^* y \rangle_X = \langle (\lambda T)x, y \rangle_Y = \lambda \langle Tx, y \rangle_Y = \lambda \langle x, T^* y \rangle_X = \langle x, \overline{\lambda} T^* y \rangle_X,$$

ou seja,

$$\langle x, [(\lambda T)^* - \overline{\lambda} T^*] y \rangle_X = 0,$$

e o resultado segue do Lema 3.74.

4. Para todos $x \in X$ e $y \in Y$

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^* y \rangle_X = \overline{\langle T^* y, x \rangle_X} = \overline{\langle y, T^{**} x \rangle_Y} = \langle T^{**} x, y \rangle_Y$$

ou seja,

$$\langle (T^{**} - T)x, y \rangle_Y.$$

Novamente o resultado segue do Lema 3.74.

5. Temos

$$||T^* T|| \leq ||T^*|| \, ||T|| = ||T||^2$$

e

$$||T T^*|| \leq ||T|| \, ||T^*|| = ||T||^2$$

Para todo $x \in X$ temos

$$||Tx||_Y^2 = \langle Tx, Tx \rangle_Y = \langle x, T^* T x \rangle_X \leq ||x||_X \, ||T^* T x||_X \leq ||T^* T|| \, ||x||_X^2.$$

Assim,

$$||T||^2 = (\sup_{||x||_X = 1} ||Tx||_Y)^2 = \sup_{||x||_X = 1} ||Tx||_Y^2 \leq ||T^* T||.$$

Trocando T por T^* e usando o item anterior também obtemos $||T^*||^2 \leq ||TT^*||$, isto é, $||T||^2 \leq ||TT^*||$

Portanto, $||T^*T|| = ||TT^*|| = ||T||^2$.

6. Segue do item anterior.

7. Para todos $x \in X$ e $z \in Z$

$$\langle x, (RT)^* z\rangle_X = \langle RTx, z\rangle_Z = \langle Tx, R^*y\rangle_Y = \langle x, T^*R^*y\rangle_X.$$

Mais uma vez o resultado segue do Lema 3.74.

□

3.5 Operadores autoadjuntos, ortogonais ou unitários e normais

Definição 3.78 *Sejam X um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathscr{B}(X)$. Dizemos que T é*

- *autoadjunto se $T = T^*$. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o operador T também é chamado de hermitiano;*
- *ortogonal, no caso real, e unitário, no caso complexo, se T é bijetor e $T^{-1} = T^*$;*
- *normal se $TT^* = T^*T$.*

Observação 3.79 *Todo operador autoadjunto (hermitiano) ou ortogonal (unitário) é normal.*

Exemplo 3.80 *Seja X um espaço de Hilbert complexo de dimensão maior ou igual a 1. Seja $T = 2iI$, I a identidade de X. Temos $||T|| = 2$.*

Como $T^* = -2iI$ e $T^{-1} = (2i)^{-1}I$, segue que T

- *não é hermitiano pois $T \neq T^*$;*
- *não é unitário pois $T^{-1} \neq T^*$;*

- *é normal pois $T^*T = TT^* = 4I$.*

Teorema 3.81 *Sejam X um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathscr{B}(X)$. Tem-se*

1. *se T é autoajunto ou hermitiano então $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$; em particular, todo autovalor de T é real;*

2. *se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$ então T é hermitiano.*

Demonstração:

1. Como $T = T^*$, para todo $x \in X$ temos

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle,$$

ou seja, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T então existe $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$ e, de $\langle Tx, x\rangle = \lambda ||x||^2$, segue que $\lambda = ||x||^{-2}\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

2. Como $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in X$ temos

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle,$$

isto é, $\langle (T^* - T)x, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$. Como X é complexo, segue do Lema 3.75 que $T = T^*$.

$\square$

Teorema 3.82 *Sejam X um espaço de Hilbert e $T, S \in \mathscr{B}(X)$ autoadjuntos (hermitianos). Então TS é autoadjunto (hermitiano) se e somente se $ST = TS$.*

Demonstração:

Como $(ST)^* = T^*S^* = TS$ temos que $(ST)^* = ST$ se e somente se $ST = TS$.

$\square$

Teorema 3.83 *Sejam X um espaço de Hilbert e $T_n \in \mathscr{B}(X)$, $n \geq 1$ operadores autoadjuntos (hermitianos). Se (T_n) converge para algum $T \in \mathscr{B}(X)$, isto é, $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T|| = 0$ então T é autoadjunto (hermitiano).*

Demonstração:

Note que

$$||T_n^* - T^*|| = ||(T_n - T)^*|| = ||T_n - T||.$$

Como $T_n^* = T_n$ temos

$$||T - T^*|| \leq ||T - T_n|| + ||T_n - T_n^*|| + ||T_n^* - T^*|| = 2||T - T_n|| \to 0.$$

Portanto, $T = T^*$.

$\square$

Proposição 3.84 *Sejam X um espaço de Hilbert e $T \in \mathscr{B}(X)$. Então T é uma isometria se e somente se T é unitário (ortogonal).*

Demonstração:

Suponha que T seja unitário (ortogonal). Então T é uma bijeção linear e para todo $x \in X$ temos

$$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, T^{-1}Tx\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2,$$

ou seja, $||Tx|| = ||x||$. Logo T é uma isometria (linear).

Reciprocamente, suponha que T seja uma isometria (linear), isto é, T é bijetor e $||Tx|| = ||x||$ para todo $x \in X$. Como T preserva norma, pela identidade de polarização (complexa ou real), T preserva produto interno, isto é, $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in X$. Assim, para todos $x, y \in X$

$$\langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle,$$

isto é, $\langle (T^*T - I)x, y\rangle = 0$ para todos $x, y \in X$. Pelo Lema 3.74, $T^*T = I$.

Também,

$$TT^* = (TT^*)(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = T(I)T^{-1} = TT^{-1} = I.$$

Portanto, $T^{-1} = T^*$.

$\square$

Proposição 3.85 *Sejam X um espaço de Hilbert e $T, S \in \mathscr{B}(X)$ operadores unitários (ortogonais). Tem-se*

1. *se* $X \neq \{0\}$ *então* $||T|| = 1$*;*

2. T^{-1} *é unitário (ortogonal);*

3. TS *é unitário (ortogonal).*

Demonstração:

1. Se $X \neq \{0\}$ então pela Proposição 3.84

$$||T|| = \sup_{||x||=1} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||x|| = 1.$$

2. Basta ver que T^{-1} também é uma isometria pois é bijetor e preserva normas.

3. Basta ver que a composta de duas isometrias é uma isometria ou diretamente por

$$(TS)^* = S^*T^* = S^{-1}T^{-1} = (TS)^{-1}.$$

□

Capítulo 4

Teoremas clássicos da Análise Funcional

4.1 O teorema de Hahn-Banach

O teorema de Hahn-Banach e seus corolários são proposições de extensão de funcionais lineares definidos em subespaços vetoriais de modo a preservar certas propriedades que o funcional possa ter. Por exemplo, se o funcional linear dado for limitado, então existe uma extensão deste funcional que é limitada e, além do mais, a norma da extensão coincide com a norma do funcional original.

É sempre possível estender um funcional linear estendo a base do subespaço vetorial em que ele estiver definido para uma base do espaço todo e colocando a extensão valendo zero nestes vetores que foram adicionados. Se o espaço for normado e de dimensão finita então esta extensão será também contínua. No caso de dimensão infinita esse procedimento nem sempre estende o funcional dado continuamente.

Exemplo 4.1 *Considere* $(X = C([0,1];\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$*. Sejam* $y_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dadas por* $y_n(t) = t^{n-1}$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $Y = [y_1, y_2, \ldots]$ *e* $f : Y \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(y) = \int_0^1 y(t)\,dt$*. Temos* $||f|| = 1$*. Como* $\overline{Y} = X$*, a única extensão contínua de* f *é dada por* $F(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$*. De fato, se* $G \in X^*$ *estende* f *então,* *dado* $x \in X$*, tome* $p_n \in Y$ *tal que* $p_n \to x$*, temos*

$$|G(x) - F(x)| = |G(x) - \int_0^1 x(t)\,dt| = |G(\lim_{n\to\infty} p_n) - \int_0^1 \lim_{n\to\infty} p_n(t)\,dt|$$

$$= |\lim_{n\to\infty}(G(p_n) - \int_0^1 p_n(t)\,dt)| = |\lim_{n\to\infty}(f(p_n) - f(p_n))| = 0.$$

Note que as funções y_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, são linearmente independentes. Seja* $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $z(t) = e^t$*. Como* $z \notin Y$*, as funções* z*,* y_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, também são linearmente independentes. Dessa forma é possível completar o conjunto formado por estas funções para uma base* $\mathscr{B}$ *(de Hamel) de* X*. Assim,* $\mathscr{B} = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \mathscr{B}'$ *com* $z \in \mathscr{B}'$*. Considere o funcional linear* $F_0 : X \to \mathbb{R}$ *que estende* f *e é igual a zero nos vetores de* $\mathscr{B}'$*. Em particular,* $F_0(z) = 0$*. Se* F_0 *fosse contínuo então* $F_0 = F$*, mas* $F(z) = e - 1 \neq 0 = F_0(z)$*.*

Teorema 4.2 (Teorema de Hahn-Banach - caso real) *Sejam* X *um espaço vetorial real e* $p : X \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *e* $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *para todos* $x, y \in X$ *e* $\lambda \geq 0$*. Se* f *é um funcional linear definido em um subespaço vetorial* Y *de* X *satisfazendo* $f(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in Y$ *então existe um funcional linear* F *definido em* X *que estende* f *e satisfaz* $F(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in X$*.*

Demonstração:

Seja

$$\mathscr{F} \doteq \{g : \mathscr{D}(g) \overset{\text{sev}}{\subset} X \to \mathbb{R}; g \text{ é linear},$$
$$Y \subset \mathscr{D}(g), g_{|_Y} = f, g(x) \leq p(x), \forall x \in \mathscr{D}(g)\}.$$

• $\mathscr{F} \neq \varnothing$ pois $f \in \mathscr{F}$.

Dados $g, h \in \mathscr{F}$ definimos $g \leq h$ se $\mathscr{D}(g) \subset \mathscr{D}(h)$ e $h_{|_{\mathscr{D}(g)}} = g$. É imediato que $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathscr{F}$.

Mostremos que toda cadeia $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathscr{F}$ possui limitante superior em $\mathscr{F}$.

Seja $\mathscr{D} = \cup_{\alpha\in A}\mathscr{D}(g_\alpha)$.

• $\mathscr{D}$ é um subespaço vetorial de X.

De fato, é claro que $0 \in \mathscr{D}(g_\alpha)$ para todo $\alpha \in A$ e, portanto, $0 \in \mathscr{D}$.

Sejam $x, y \in \mathscr{D}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, existem $\alpha, \beta \in A$ tais que $x \in \mathscr{D}(g_\alpha)$ e $y \in \mathscr{D}(g_\beta)$. Como $g_\alpha \leq g_\beta$ ou $g_\beta \leq g_\alpha$ temos $\mathscr{D}(g_\alpha) \subset \mathscr{D}(g_\beta)$ ou $\mathscr{D}(g_\beta) \subset \mathscr{D}(g_\alpha)$, concluímos que existe $\gamma \in A$ ($\gamma \in \{\alpha, \beta\}$) tal que $x, y \in \mathscr{D}(g_\gamma)$. Portanto, $x + \lambda y \in \mathscr{D}(g_\gamma) \subset \mathscr{D}$.

• A função $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ dada $g(x) = g_\alpha(x)$ se $x \in \mathscr{D}(g_\alpha)$ é bem definida.

De fato, dado $x \in \mathscr{D}$ existe $\alpha \in A$ tal que $x \in \mathscr{D}(g_\alpha)$ e caso também haja $\beta \in A$ tal que $x \in \mathscr{D}(g_\beta)$ então como $g_\alpha \leq g_\beta$ ou $g_\beta \leq g_\alpha$ temos ${g_\beta}_{|_{\mathscr{D}(g_\alpha)}} = g_\alpha$ ou ${g_\alpha}_{|_{\mathscr{D}(g_\beta)}} = g_\beta$. Dessa forma, $g_\alpha = g_\beta$ em $\mathscr{D}(g_\alpha) \cap \mathscr{D}(g_\beta)$ e $g(x)$ é determinado.

• g é linear.

De fato, dados $x, y \in \mathscr{D}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ vimos que existe $\gamma \in A$ tal que $x, y \in \mathscr{D}(g_\gamma)$ e, portanto,

$$g(x + \lambda y) = g_\gamma(x + \lambda y) = g_\gamma(x) + \lambda g_\gamma(y) = g(x) + \lambda g(y).$$

• $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathscr{D}$.

De fato, dado $x \in \mathscr{D}$, existe $\alpha \in A$ tal que $x \in \mathscr{D}(g_\alpha)$ e, portanto, $g(x) = g_\alpha(x) \leq p(x)$.

• $g_{|_Y} = f$.

De fato, se $x \in Y$ então $x \in \mathscr{D}(g_\alpha)$ para todo $\alpha \in A$. Logo, $g(x) = g_\alpha(x) = f(x)$.

• g é um limitante da cadeia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathscr{F}$.

De fato, $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ é linear, $Y \subset \mathscr{D}$ e $g_{|_Y} = f$ e $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathscr{D}$, ou seja, $g \in \mathscr{F}$. Além do mais, para todo $\alpha \in A$ temos $\mathscr{D}(g_\alpha) \subset \mathscr{D}$ e $g_{|_{\mathscr{D}(g_\alpha)}} = g_\alpha$, isto é, $g_\alpha \leq g$.

Pelo lema de Zorn existe em $\mathscr{F}$ um elemento maximal $F : \mathscr{D}(F) \subset X \to \mathbb{R}$. Como $F \in \mathscr{F}$ temos que F é um funcional linear que satisfaz $Y \subset \mathscr{D}(F)$, $F_{|_Y} = f$, $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathscr{D}(F)$ e se $h \in \mathscr{F}$ é tal que $F \leq h$ então $h = F$.

Mostremos que $X_0 \doteq \mathscr{D}(F) = X$. Se tivéssemos $X_0 \subsetneq X$, tome $y_1 \in X \setminus X_0$ e considere o subespaço vetorial $X_1 = [X_0 \cup \{y_1\}] = X_0 + [y_1]$. Mostremos que $X_1 = X_0 \oplus [y_1]$. Se $x, x' \in X_0$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ são tais que $x + \lambda y_1 = x' + \lambda' y_1$ então $x - x' = (\lambda' - \lambda) y_1$. Se $\lambda \neq \lambda'$ então $y_1 = (\lambda' - \lambda)^{-1}(x - x') \in X_0$, um absurdo. Logo, $\lambda = \lambda'$ e $x = x'$, ou seja, a soma é direta.

Assim, para cada $z \in X_1$ existem um único $x(z) \in X_0$ e um único $\lambda(z) \in \mathbb{R}$ tais que $z = x(z) + \lambda(z) y_1$. Dessa forma, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos definir $h_\alpha : X_1 \to \mathbb{R}$ por $h_\alpha(z) = F(x(z)) + \alpha \lambda(z)$.

- $X_0 \subset X_1$.
- h_α é linear.

De fato, dados $z, z' \in X_1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$h_\alpha(z + \beta z') = h_\alpha((x(z) + \lambda(z) y_1) + \beta(x(z') + \lambda(z') y_1))$$

$$= h_\alpha((x(z) + \beta x(z')) + (\lambda(z) + \beta \lambda(z')) y_1)) = F(x(z) + \beta x(z')) + \alpha(\lambda(z) + \beta \lambda(z'))$$

$$= [F(x(z)) + \alpha \lambda(z)] + \beta[F(x(z')) + \alpha \lambda(z')] = h_\alpha(z) + \beta h_\alpha(z').$$

- $h_{\alpha|_{X_0}} = F$.

De fato, se $z \in X_0$ então $x(z) = z$ e $\lambda(z) = 0$. Daí $h_\alpha(z) = F(x(z)) + \alpha 0 = F(x(z)) = F(z)$.

- Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $h_\alpha \leq p$ em X_1.

De fato, dados $x, y \in X_0$ temos

$$F(y) - F(x) = F(y - x) \leq p(y - x) \leq p(y + y_1) + p(-y_1 - x).$$

Portanto,

$$\underbrace{-F(x) - p(-y_1 - x)}_{\text{independe de } y} \leq \underbrace{p(y + y_1) - F(y)}_{\text{independe de } x}.$$

Tomando

$$\alpha \in [\sup\{-F(x) - p(-y_1 - x); x \in X_0\}, \inf\{p(y + y_1) - F(y); y \in X_0\}]$$

temos

$$-F(x) - p(-y_1 - x) \leq \alpha \leq p(y + y_1) - F(y)$$

para todos $x, y \in X_0$.

Como $h_{\alpha|_{X_0}} = F$, em X_0 temos $h_\alpha \leq p$. Agora, se $z \in X_1 \setminus X_0$ temos $c \doteq \lambda(z) \neq 0$.

Como $x(z)/c \in X_0$, se $c > 0$ então

$$\alpha \leq p(\frac{1}{c}x(z) + y_1) - F(\frac{1}{c}x(z)) = p(\frac{1}{c}(x(z) + cy_1)) - F(\frac{1}{c}x(z))$$
$$= \frac{1}{c}[p(x(z) + cy_1) - F(x(z))] = \frac{1}{c}[p(z) - F(x(z))],$$

logo,

$$h_\alpha(z) = F(x(z)) + \alpha\lambda(z) = F(x(z)) + \alpha c \leq p(z)$$

Se $c < 0$ então

$$\alpha \geq -F(\frac{1}{c}x(z)) - p(-y_1 - \frac{1}{c}x(z)) = -F(\frac{1}{c}x(z)) - p(-\frac{1}{c}(x(z) + cy_1))$$
$$= \frac{1}{c}[p(x(z) + cy_1) - F(x(z))] = \frac{1}{c}[p(z) - F(x(z))],$$

logo, $c\alpha \leq p(z) - F(x(z))$ e, portanto,

$$h_\alpha(z) = F(x(z)) + \alpha\lambda(z) = F(x(z)) + \alpha c \leq p(z).$$

Assim, $h_\alpha \in \mathscr{F}$ e $F \leq h_\alpha$. Portanto, $F = h_\alpha$. Dessa forma, $\mathscr{D}(F) = X_0 \supset \mathscr{D}(h_\alpha) = X_0 \oplus [y_1] = X_1$. Assim, $y_1 \in X_0$, uma contradição.

$\square$

Antes de enunciarmos a versão do teorema de Hahn-Banach que também é válida para espaços vetoriais complexos notemos que:

• Todo espaço vetorial complexo pode ser visto como um espaço vetorial real pois $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

• Um funcional $\mathbb{R}$-linear é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um espaço vetorial complexo satisfazendo $f(x+\lambda y) = f(x)+\lambda f(y)$ para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Sejam f_1 e f_2 são funcionais $\mathbb{R}$-lineares definidos no espaço vetorial complexo X. Se $f = f_1 + if_2$ for linear, isto é, $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$ para todo $x \in X$. De fato,

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) = f(-i(ix)) = -if(ix)$$
$$= -i[f_1(ix) + if_2(ix)] = f_2(ix) - if_1(ix),$$

ou seja, $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x) = f_2(ix)$ e $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x) = -f_1(ix)$. Assim, podemos reescrever $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$.

Teorema 4.3 (Teorema de Hahn-Banach - caso geral) *Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $p : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ e $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se f é um funcional linear definido em um subespaço vetorial Y de X satisfazendo $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$ então existe um funcional linear F definido em X que estende f e satisfaz $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração:

Note que $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0| p(0) = 0$. Além do mais, para todos $x \in X$, $p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + |-1| p(x) = 2p(x)$, isto é, $p(x) \geq 0$. Portanto, p é uma seminorma.

Suponha que X seja um espaço vetorial real. Note que se $\lambda \geq 0$ então $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = \lambda p(x)$ e $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Assim, pelo Teorema 4.2 existe $F : X \to \mathbb{R}$ linear que estende f e satisfaz $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Por outro lado, para $x \in X$ também temos $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$. Portanto, $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Suponha que X seja um espaço vetorial complexo. Sejam $f_1 = \operatorname{Re} f$ e $f_2 = \operatorname{Im} f$. Claramente, f_1 e f_2 são funcionais lineares definidos de Y em $\mathbb{R}$ e satisfazem $|f_1(x)|, |f_2(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$.

Como X e Y podem ser vistos como espaços vetoriais reais e f_1 é um funcional $\mathbb{R}$-linear, podemos utilizar a parte já demonstrada e obter um funcional $\mathbb{R}$-linear $F_1 : X \to \mathbb{R}$ que estende f_1 e satisfaz, como acima, $|F_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Defina $F : X \to \mathbb{C}$ por $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$.

• F é linear, isto é, $F(x + \lambda y) = F(x) + \lambda F(y)$ para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

De fato, se $x, y \in X$ então

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F_1(x+y) - iF_1(i(x+y)) = F_1(x) + F_1(y) - iF_1(ix) - iF_1(iy) \\ &= [F_1(x) - iF_1(ix)] + [F_1(y) - iF_1(iy)] = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$ e $\beta = \operatorname{Im} \lambda$, então

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= F((\alpha + i\beta)x) = F_1((\alpha + i\beta)x) - iF_1(i(\alpha + i\beta)x)) \\ &= \alpha F_1(x) + \beta F_1(ix) - i[\alpha F_1(ix) - \beta F_1(x)] \end{aligned}$$

$= \alpha[F_1(x) - iF_1(ix)] + i\beta[F_1(x) - iF_1(ix)] = (\alpha + i\beta)[F_1(x) - iF_1(ix)] = \lambda F(x).$

• F estende f.

De fato, se $y \in Y$ então $iy \in Y$ e assim,

$$F(y) = F_1(y) - iF_1(iy) = f_1(y) - if_1(iy)$$

Mas como

$$f_1(y) + if_2(y) = f(y) = -if(iy) = -i[f_1(iy) + if_2(iy)] = f_2(iy) - if_1(iy),$$

temos $f_2(y) = -f_1(iy)$ e, portanto,

$$F(y) = f_1(y) - if_1(iy) = f_1(y) + if_2(y) = f(y).$$

• $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

De fato, se $x \in X$ é tal que $F(x) = 0$ a desigualdade é válida pois $p(x) \geq 0$. Se $F(x) \neq 0$ então podemos escrever $F(x) = |F(x)|e^{i\theta}$ para algum $\theta \in [0, 2\pi)$. Portanto,

$$|F(x)| = e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) = F_1(e^{-i\theta}x) - iF_1(ie^{-i\theta}x)$$

$$= F_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

$\square$

Corolário 4.4 *Sejam X um EVN, $Y \subset X$ um subespaço vetorial e $f \in Y^*$. Então existe $F \in X^*$ tal que $F_{|_Y} = f$ e $||F|| = ||f||$.*

Demonstração:

Se $Y = \{0\}$ = tome $F = 0$.

Suponha agora que $Y \neq \{0\}$.

Seja $p : X \to \mathbb{R}$ dada dor $p(x) = ||f||\,||x||$. É imediato que $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ e $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Como

$$|f(y)| \leq ||f||\,||y|| = p(y)$$

para todo $y \in Y$, pelo Teorema 4.3 existe $F : X \to \mathbb{K}$ linear tal que $F_{|_Y} = f$ e $|F(x)| \leq ||f||\,||x||$ para todo $x \in X$. Em particular, $F \in X^*$ e $||F|| \leq ||f||$. Por outro lado,

$$||F|| = \sup_{\substack{x\in X \\ ||x||=1}} |F(x)| \overset{X\supset Y\neq\{0\}}{\geq} \sup_{\substack{y\in Y \\ ||y||=1}} |f(y)| = ||f||,$$

portanto, $||F|| = ||f||$.

$\square$

Corolário 4.5 *Sejam X um EVN e $x_0 \in X$ $x_0 \neq 0$. Então existe $F \in X^*$ tal que $F(x_0) = ||x_0||$ e $||F|| = 1$*

Demonstração:

Seja $Y = [x_0]$. Como para cada $y \in Y$ existe um único $\lambda(y) \in \mathbb{K}$ tal que $y = \lambda(y)x_0$ podemos definir $f : Y \to \mathbb{K}$ por $f(y) = f(\lambda(y)x_0) = \lambda(y)||x_0||$.

f é linear pois, se $y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então

$$f(y_1 + \alpha y_2) = f(\lambda(y_1)x_0 + \alpha\lambda(y_2)x_0) = f([\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2)]x_0)$$

$$= [\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2)]||x_0|| = \lambda(y_1)||x_0|| + \alpha\lambda(y_2)]||x_0|| = f(y_1) + \alpha f(y_2)$$

Como $|f(y)| = |\lambda(y)|||x_0|| = ||\lambda(y)x_0|| = ||y||$ para todo $y \in Y$, temos $||f|| = 1$. Pelo Corolário 4.4 existe $F \in X^*$ tal que $F_{|_Y} = f$, $||F|| = 1$. Finalmente, como $x_0 \in Y$, $F(x_0) = f(x_0) = ||x_0||$.

$\square$

Uma consequência do corolário acima é que se $X \neq \{0\}$ então $X^* \neq \{0\}$.

Corolário 4.6 *Sejam $X \neq \{0\}$ um EVN e $x \in X$. Então*

$$||x|| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)|.$$

Demonstração:

Se $x = 0$ o resultado é óbvio.

Suponha $x \neq 0$. Pelo Corolário 4.5 existe $F \in X^*$ tal que $||F|| = 1$ e $F(x) = ||x||$. Assim,

$$\sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)| \geq |F(x)| = ||x||$$

e, por outro lado,

$$\sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)| \leq \sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||=1}} ||f||\,||x|| = ||x||.$$

Portanto,

$$||x|| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)|.$$

$\square$

Corolário 4.7 *Sejam X um EVN e $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$. Então $x_0 = 0$.*

Demonstração:

Se $X = \{0\}$ o resultado é óbvio.

Se $X \neq \{0\}$ então pelo Corolário 4.6

$$||x_0|| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||=1}} |f(x_0)| = 0.$$

$\square$

O corolário acima é equivalente a

Corolário 4.8 *Sejam X um EVN e $x, y \in X$ tais que $f(x) = f(y)$ para todo $f \in X^*$. Então $x = y$.*

Corolário 4.9 *Sejam X um EVN e $Y \subset X$, $Y \neq X$, um subespaço vetorial fechado. Sejam $x_0 \in X \setminus Y$ e $\delta = d(x_0, Y)$. Então existe $f \in X^*$ tal que $||f|| = 1$, $f = 0$ em Y e $f(x_0) = \delta$.*

Demonstração:

Seja $Z = [Y \cup \{x_0\}] = Y \oplus [x_0]$. Como para cada $z \in Z$ existe um único $y \in Y$ e um único $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $z = y + \lambda x_0$, fica bem definido $f_0 : Z \to \mathbb{K}$ por

$$f_0(z) = f_0(y + \lambda x_0) = \lambda\delta.$$

A linearidade de f_0 é imediata.

Se $z \in Y$ então $f_0(z) = 0\delta = 0$.

Seja $z = y + \lambda x_0$, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $z \in Y$, isto é, $\lambda = 0$ então $f_0(z) = 0\delta = 0$. Se $\lambda \neq 0$,

$$|f_0(z)| = |\lambda|\delta = |\lambda| \inf_{u \in Y} ||u - x_0|| = |\lambda| \inf_{u \in Y} ||-\frac{1}{\lambda}u - x_0||$$

$$\leq |\lambda| \, ||-\frac{1}{\lambda}y - x_0|| = ||y + \lambda x_0|| = ||z||.$$

Portanto, $||f_0|| \leq 1$.

Tome $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $||y_n - x_0|| \to \delta$. Coloque $z_n = -y_n + x_0 \in Z$. Temos $z_n \neq 0$ e $f_0(z_n) = \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$||f_0|| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{||z||} \geq \frac{|f(z_n)|}{||z_n||} = \frac{\delta}{||x_0 - y_n||} \to 1,$$

segue que $||f_0|| \geq 1$. Portanto, $||f_0|| = 1$.

Pelo Corolário 4.4 existe $f \in X^*$ tal que $f_{|Z} = f_0$, $||f|| = ||f_0|| = 1$. Em particular, $f_{|Y} = 0$ e $f(x_0) = \delta$.

$\square$

4.2 Princípio da limitação uniforme e o teorema de Banach-Steinhaus

Precisaremos da seguinte versão do Teorema de Baire.

Teorema 4.10 (Teorema de Baire) *Seja (X, d) um espaço métrico completo, $X \neq \varnothing$. Se X_n, $n \in \mathbb{N}$ são subconjuntos fechados de X tais que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que* $\operatorname{int} X_{n_0} \neq \varnothing$.

Demonstração:

Suponha que $\operatorname{int} X_n = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\operatorname{int} X = X \neq \varnothing$, temos que $X_n \neq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $X_1^c = X \setminus X_1$ é aberto e não vazio. Logo, existem $x_1 \in X_1^c$ e $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ tais que

$$B_1 \doteq B(x_1, \varepsilon_1) \doteq \{x \in X; d(x, x_1) < \varepsilon_1\} \subset X_1^c.$$

Como $\operatorname{int} X_2 = \varnothing$, $B(x_1, \varepsilon_1/2) \not\subset X_2$. Logo, existem $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1/2) \cap X_2^c$ e $\varepsilon_2 \in (0, 1/4)$ tais que

$$B_2 \doteq B(x_2, \varepsilon_2) \subset B(x_1, \varepsilon_1/2) \cap X_2^c.$$

Utilizando indução obtemos uma sequência de pontos $x_n \in X$ e uma sequência de números ε_n satisfazendo

- $\varepsilon_n \in (0, 1/2^n)$
- $B_{n+1} \doteq B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_n, \varepsilon_n/2) \subset B_n$. Portanto, $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n/2 < 1/2^{n+1}$.
- $B_n \subset X_n^c$, isto é, $B_n \cap X_n = \varnothing$

Se $m > n \geq 1$ então

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) < \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^{j+1}} < \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. Como X é completo, x_n converge para algum $x \in X$.

Novamente, se $m > n \geq 1$ então, como $x_m \in B(x_n, \varepsilon_n/2)$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon_n}{2} + d(x_m, x).$$

Como $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) = 0$ temos

$$d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon_n}{2} < \varepsilon_n,$$

isto é, $x \in B_n \subset X_n^c$ para todo $n \geq 1$. Portanto, $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$, absurdo.

$\square$

Teorema 4.11 (Princípio da limitação uniforme) *Sejam X um espaço de Banach e Y um EVN. Seja $\{T_a : X \to Y, a \in A\}$ uma família de operadores limitados.*

Se para cada $x \in X$ o conjunto $\{T_a x; a \in A\}$ for limitado em Y então $\lim_{x\to 0} T_a x = 0$ uniformemente em A, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||T_a x|| < \varepsilon$ para todo $a \in A$ sempre que $||x|| < \delta$.

Demonstração:

Para cada $a \in A$ defina $\varphi_a : X \to [0, \infty)$ por $\varphi_a(x) = ||T_a x||$. Como

$$|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)| \leq ||T_a||\,||x - y||,$$

φ_a é contínua.

Dados $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, definindo

$$X_k \doteq \{x \in X; \frac{1}{k}||T_a x|| \leq \varepsilon/2, \forall a \in A\} = \cap_{a\in A}\{x \in X; \frac{1}{k}||T_a x|| \leq \varepsilon/2\}$$
$$= \cap_{a\in A}\{x \in X; ||T_a x|| \leq k\varepsilon/2\} = \cap_{a\in A}\varphi_a^{-1}([0, k\varepsilon/2]),$$

vemos que X_k é fechado.

Dado $x \in X$, por hipótese, existe $C_x > 0$ tal que $||T_a x|| \leq C_x$ para todo $a \in A$.

Tome $k = k(x) \in \mathbb{N}$ tal que $k > 2C_x/\varepsilon$. Temos

$$||\frac{1}{k}T_a x|| \leq \frac{C_x}{k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é, $x \in X_k$, ou seja, $X = \cup_{k\geq 1} X_k$.

Pelo teorema de Baire, existe $k_0 \geq 1$ tal que $\operatorname{int} X_{k_0} \neq \varnothing$. Logo, existem $x_0 \in X$ e $\delta > 0$ tais que $B(x_0, \delta) \subset X_{k_0}$.

Se $||x|| < \delta$ então $x_0 + x \in B(x_0, \delta) \subset X_{k_0}$. Portanto,

$$\frac{1}{k_0}||T_a(x_0 + x)|| \leq \varepsilon/2, \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Assim, se $||x|| < \delta$ então

$$\frac{1}{k_0}||T_a x|| \leq \frac{1}{k_0}[||T_a(x_0 + x)|| + ||T_a x_0||] \overset{x_0\in X_{k_0}}{\leq} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Finalmente, tomando $\delta_0 = \delta/k_0$ temos que se $||x|| < \delta_0$ então $||k_0 x|| < \delta$ e, portanto,

$$||T_a x|| = \frac{1}{k_0}||T_a(k_0 x)|| \leq \varepsilon, \qquad \text{para todo } a \in A.$$

$\square$

Corolário 4.12 *Sejam X um espaço de Banach e Y um EVN. Seja $T_a \in \mathscr{B}(X,Y)$, $a \in A$, sendo A um conjunto de índice. Se para cada $x \in X$ o conjunto $\{T_a x; a \in A\}$ for limitado em Y então existe $C > 0$ tal que $||T_a|| \leq C$ para todo $a \in A$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 4.10 existe $\delta > 0$ tal que se $||y|| < \delta$ então $||T_a y|| \leq 1$ para todo $a \in A$.

Segue que, para todo $a \in A$, temos

$$||T_a|| = \sup_{||x||=1} ||T_a x|| = \sup_{||x||=1} \frac{2}{\delta}||T_a(x\delta/2)|| \leq \frac{2}{\delta}.$$

$\square$

Corolário 4.13 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam X um espaço de Banach, Y um EVN e $T_n \in \mathscr{B}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Se para cada $x \in X$ existe o limite de $T_n x$, denotado por Tx, então $\sup_n ||T_n|| < \infty$, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ e $||T|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||$.*

Demonstração:

Segue da linearidade do limite que $T : X \to Y$ é linear.

Como para cada $x \in X$ a sequência $(T_n x)$ converge, o conjunto $\{T_n x, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em Y.

Pelo Corolário 4.12 existe $C > 0$ tal que $||T_n|| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\sup_n ||T_n|| < \infty$.

Assim, para todo $x \in X$, $||T_n x|| \leq ||T_n||\,||x|| \leq C||x||$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$||Tx|| = ||\lim_{n\to\infty} T_n x|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||\,||x|| \leq C||x||$$

isto é, T é limitado e $||T|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||$.

$\square$

4.3 Teorema da aplicação aberta

Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $A \subset X$, $x_0 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ definimos

1. $A + x_0 = \{x + x_0; x \in A\}$ (translação)
2. $\lambda A = \{\lambda x; x \in A\}$ (dilatação ou homotetia)

Note que se $\lambda \neq 0$ e $B = \lambda A$ então $A = \lambda^{-1}B$.

Se $B = A + x_0$ então $A = B + (-x_0) \doteq B - x_0$.

Se $T : X \to Y$ é linear e $A \subset X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_0 \in X$ então $T(\lambda A + x_0) = \lambda T(A) + T(x_0)$.

Se além do mais, X e Y forem EVN e $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ então $\overline{T(\lambda A + x_0)} = \lambda\overline{T(A)} + T(x_0)$. De fato, como o caso $\lambda = 0$ é óbvio, podemos supor $\lambda \neq 0$. Temos que $y \in \overline{T(\lambda A + x_0)}$ se e somente se existe uma sequência a_n de A tal que

$$y = \lim_{n\to\infty} T(\lambda a_n + x_0) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T(a_n) + T(x_0)) = \lambda \lim_{n\to\infty} T(a_n) + T(x_0),$$

isto é, se e somente se $y \in \lambda\overline{T(A)} + T(x_0)$.

Definição 4.14 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é aberta se para todo aberto $\mathscr{O} \in X$, $f(\mathscr{O})$ é aberto em Y.*

Observação 4.15 *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Como para todo (aberto) $\mathscr{O} \subset X$ vale que $f(\mathscr{O}) = (f^{-1})^{-1}(\mathscr{O})$, vemos que f^{-1} é contínua se e somente se f for aberta.*

Lema 4.16 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ sobrejetor. Se $B_0 \doteq B(0, 1) = \{x \in X; ||x|| < 1\}$ então $T(B_0)$ contém uma bola aberta centrada na origem, isto é, 0 é um ponto interior de $T(B_0)$.*

Demonstração:

Coloque $B' = B(0,1/2) \subset X$. Dado $x \in X$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $||x|| < k/2$. Portanto $X = \cup_{k\in\mathbb{N}} kB'$.

Como T é linear e sobrejetor,

$$Y = T(X) = T(\cup_{k\in\mathbb{N}} kB') = \cup_{k\in\mathbb{N}} kT(B') = \cup_{k\in\mathbb{N}} \overline{kT(B')}.$$

Como Y é completo, pelo teorema de Baire existe uma bola aberta $B(y_0, r)$ contida em $\overline{kT(B')}$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Sejam $z_0 = y_0/k$ e $\varepsilon = r/k$. Dado $y \in B^* \doteq B(z_0, \varepsilon)$ temos

$$||y_0 - ky|| = k||z_0 - y|| < k\varepsilon = r,$$

portanto, $ky \in B(y_0, r) \subset \overline{kT(B')}$. Tomando $u_n \in T(B')$ tal que ku_n convirja para ky, vemos que u_n converge para y e, consequentemente, $y \in \overline{T(B')}$. Portanto, $B^* \subset \overline{T(B')}$ e $B(0, \varepsilon) = B^* - z_0 \subset \overline{T(B')} - z_0$.

Mostremos que $\overline{T(B')} - z_0 \subset \overline{T(B_0)}$.

Seja $y \in \overline{T(B')} - z_0$. Temos $y + z_0 \in \overline{T(B')}$ e como também $z_0 \in B^* \subset \overline{T(B')}$, existem $w_n, z_n \in B'$ tais que $Tw_n \to y + z_0$ e $Tz_n \to z_0$. Logo, $T(w_n - z_n) \to y$. Mas

$$||w_n - z_n|| \leq ||w_n|| + ||z_n|| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

isto é, $u_n \doteq w_n - z_n \in B_0$ e $Tu_n \to y$. Portanto, $y \in \overline{T(B_0)}$.

Segue que $B(0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)}$.

Coloque $B_n = 2^{-n}B_0 \subset X$ e $V_n = 2^{-n}(B^* - z_0) = 2^{-n}B(0, \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$V_n = 2^{-n}B(0, \varepsilon) \subset 2^{-n}\overline{T(B_0)} = \overline{2^{-n}T(B_0)} = \overline{T(2^{-n}B_0)} = \overline{T(B_n)}$$

Para finalizar, basta mostrarmos que $V_1 \subset T(B_0)$.

Seja $y \in V_1$. Como $y \in \overline{T(B_1)}$, existe $x_1 \in B_1$ tal que $||y - Tx_1|| < \varepsilon/4$. Portanto, $y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$. Logo, existe $x_2 \in B_2$ tal que $||y - Tx_1 - Tx_2|| < \varepsilon/8$. Portanto, $y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$. Prosseguindo, conseguimos obter $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$||y - \sum_{n=1}^{m} Tx_n|| < \varepsilon 2^{-m-1}, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Em particular, $y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$.

Seja $z_n = x_1 + \cdots + x_n$.

Se $n > m \geq 1$,

$$||z_n - z_m|| \leq \sum_{\ell=m+1}^{n} ||x_\ell|| < \sum_{\ell=m+1}^{n} 2^{-\ell} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

Como X é completo, $x \doteq \sum_{\ell=1}^{\infty} x_\ell$ é convergente e $x \in B_0$ pois

$$||x|| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} ||x_\ell|| < \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell} = 1.$$

Finalmente,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} Tx_n = \lim_{m\to\infty} T(\sum_{n=1}^{m} x_n)$$

$$= T(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n) = Tx \in T(B_0).$$

□

Teorema 4.17 (Teorema da aplicação aberta) *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ sobrejetor. Então T é uma função aberta.*

Se além do mais T for uma bijeção então $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$.

Demonstração:

Seja $\mathscr{O} \subset X$ um aberto não vazio. Seja $y \in T(\mathscr{O})$, isto é, $y = Tx$ para algum $x \in \mathscr{O}$. Como $\mathscr{O}$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset \mathscr{O}$. Logo, $B(0,\varepsilon) \subset \mathscr{O} - x$ e, portanto, $B(0,1) \subset \varepsilon^{-1}(\mathscr{O} - x)$. Assim,

$$T(B(0,1)) \subset T(\varepsilon^{-1}(\mathscr{O} - x)) = \varepsilon^{-1}(T(\mathscr{O}) - T(x)).$$

Pelo Lema 4.16 existe uma bola $B(0,r) \subset T(B(0,1)) \subset \varepsilon^{-1}(T(\mathscr{O}) - T(x))$. Logo, $B(y,\varepsilon r) = B(Tx,\varepsilon r) \subset T(\mathscr{O})$, isto é, $T(\mathscr{O})$ é aberto.

Suponha que T seja uma bijeção. Como T é aberta, segue da Observação 4.15 que T^{-1} é contínuo, isto é, $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$.

□

Teorema 4.18 *Sejam* $(X, ||\cdot||_1)$ *e* $(X, ||\cdot||_2)$ *espaços de Banach. Se existir* $C_1 > 0$ *tal que* $||x||_1 \leq C_1||x||_2$ *para todo* $x \in X$ *então existe* $C_2 > 0$ *tal que* $||x||_2 \leq C_2||x||_1$ *para todo* $x \in X$*, isto é,* $||\cdot||_1$ *e* $||\cdot||_2$ *são equivalentes.*

Demonstração:

Seja $I : (X, ||\cdot||_2) \to (X, ||\cdot||_1)$ o operador identidade. Por hipótese $||Ix||_1 = ||x||_1 \leq C_1||x||_2$ para todo $x \in X$, isto é, I é limitado. Como I é bijetor, segue do Teorema 4.17 que $I^{-1} : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ é limitado. Portanto, $||x||_2 = ||I^{-1}x||_2 \leq ||I^{-1}||\,||x||_1$ para todo $x \in X$.

□

4.4 Teorema do gráfico fechado

Sejam $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$ EVN sobre $\mathbb{K}$. Consideremos no espaço vetorial $X \times Y$ a norma da soma, isto é, $||(x, y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$. Note que se $(x_n, y_n) \in X \times Y$ então $(x_n, y_n) \to (x, y)$ se e somente se $x_n \to x$ e $y_n \to y$.

Se X e Y são espaços de Banach então $X \times Y$ com a norma da soma também é. De fato, seja $((x_n, y_n))$ uma sequência de Cauchy em $X \times Y$. Como

$$||x_n - x_m||_X, ||y_n - y_m||_Y \leq ||(x_n, y_n) - (x_m, y_m)||$$

segue que (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em X e Y, respectivamente. Logo, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ para algum $x \in X$ e algum $y \in Y$. Portanto,

$$||(x_n, y_n) - (x, y)|| = ||x_n - x||_X + ||y_n - y||_Y \to 0.$$

É claro que a norma da soma em $X \times Y$ é equivalente às normas $||(x, y)||_\infty = \max\{||x||_X, ||y||_Y\}$ e $||(x, y)||_2 = \sqrt{||x||_X^2 + ||y||_Y^2}$.

Definição 4.19 *O gráfico de um operador linear* $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ *é definido por*

$$\mathscr{G}(T) = \{(x, Tx); x \in \mathscr{D}(T)\} \subset X \times Y.$$

Note que se $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então, como $\mathscr{D}(T)$ é um subespaço vetorial,

$$(x_1, Tx_1) + \lambda(x_2, Tx_2) = (x_1 + \lambda x_2, T(x_1 + \lambda x_2)) \in \mathscr{G}(T),$$

isto é, $\mathscr{G}(T)$ é um subespaço vetorial de $X \times Y$.

Definição 4.20 *Sejam* $(X, || \cdot ||_X)$ *e* $(Y, || \cdot ||_Y)$ *EVN sobre* $\mathbb{K}$ *e considere em* $X \times Y$ *a norma da soma. Um operador linear* $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ *é fechado se seu gráfico for fechado em* $X \times Y$*.*

Proposição 4.21 *Sejam* $(X, || \cdot ||_X)$ *e* $(Y, || \cdot ||_Y)$ *EVN sobre* $\mathbb{K}$ *e considere em* $X \times Y$ *a norma da soma. Seja* $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ *um operador linear.*

São equivalentes:

1. T *é fechado.*

2. *Para toda sequência* (x_n) *em* $\mathscr{D}(T)$ *que converge para algum* $x \in X$ *e* Tx_n *converge para algum* $y \in Y$ *então* $x \in \mathscr{D}(T)$ *e* $y = Tx$*, isto é,* $(x, y) \in \mathscr{G}(T)$*.*

Demonstração:

1. $\Rightarrow$ *2.* Suponha que T seja fechado.

Seja (x_n) em $\mathscr{D}(T)$ tal que x_n converge para algum $x \in X$ e Tx_n converge para algum $y \in Y$. Como $(x_n, Tx_n) \in \mathscr{G}(T)$ segue que $(x, y) \in \overline{\mathscr{G}(T)} = \mathscr{G}(T)$, ou seja, $x \in \mathscr{D}(T)$ e $y = Tx$.

2. $\Rightarrow$ *1.* Seja $(x, y) \in \overline{\mathscr{G}(T)}$. Tome $(x_n, Tx_n) \in \mathscr{G}(T)$ tal que (x_n, Tx_n) convirja para (x, y), isto é, $x_n \in \mathscr{D}(T)$ converge para $x \in X$ e Tx_n converge para $y \in Y$. Por hipótese, $x \in \mathscr{D}(T)$ e $y = Tx$, portanto, $(x, y) \in \mathscr{G}(T)$.

$\square$

O conceito de um operador linear ser fechado e de ser limitado são independentes.

O próximo exemplo ilustra dois aspectos: que um operador não limitado pode ser fechado e que o domínio de um operador fechado não precisa ser fechado.

Exemplo 4.22 *Considere em* $(X = C([0, 1]; \mathbb{R}), || \cdot ||_\infty)$ *o subespaço vetorial* $\mathscr{D}(T) = C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ *e o operador derivação* $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to X$*, isto é,* $Tx = x'$*,* $x \in \mathscr{D}(T)$*. Como no Exemplo 2.9, mostra-se que* T *não é limitado.*

Mostremos que T *é fechado. Pela proposição anterior basta mostrarmos que se* (x_n) *em* $\mathscr{D}(T)$ *converge para algum* $x \in X$ *e* Tx_n *converge para algum*

$y \in X$ então $x \in \mathscr{D}(T)$ e $y = Tx$. Suponha assim que (x_n) tenha estas duas propriedades.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$x_n(t) - x_n(0) = \int_0^t x_n'(s)\, ds = \int_0^t (Tx_n)(s)\, ds$$

para $t \in [0,1]$

Como a convergência uniforme implica convergência pontual,

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$$

para todo t em $[0,1]$. Como também Tx_n converge uniformemente para y em $[0,1]$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t (Tx_n)(s)\, ds = \int_0^t y(s)\, ds.$$

Assim,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\, ds$$

para todo $t \in [0,1]$.

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo $x \in \mathscr{D}(T)$ e $Tx = x' = y$.

Note que $\mathscr{D}(T)$ não é fechado em X. De fato, as funções

$$x_n(t) = \sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n}, \quad t \in [0,1],$$

são elementos de $\mathscr{D}(T)$ e, dado $\varepsilon > 0$ para todo $n > 1/\varepsilon^2$ temos para todo $t \in [0,1]$ que

$$\begin{aligned} |x_n(t) - |t-1/2|| &= |\sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n} - \sqrt{(t-1/2)^2}| \\ &= \frac{1/n}{\sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n} + |t-1/2|} \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que x_n converge para $x \in X$ dada por $x(t) = |t-1/2|$, porém $x \notin \mathscr{D}(T)$.

O próximo exemplo apresenta um operador contínuo que não é fechado.

Exemplo 4.23 *Considere o espaço de Banach* $X = \ell^2(\mathbb{R})$ *com sua norma usual.*

Sejam $e_k = (\delta_{kj})$ *e* $\mathscr{D}(T) = [e_1, e_2, \dots]$.

Seja $x = (1/n) \in X$. *Claramente,* $x \notin \mathscr{D}(T)$ *pois se* $x \in \mathscr{D}(T)$ *teríamos* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *tais que* $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$ *e, portanto, deveríamos ter* $1/n = 0$ *para todo* $n \geq m+1$. *Absurdo.*

Defina $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to X$ *como sendo a inclusão, isto é,* $Tx = x$ *para todo* $x \in \mathscr{D}(T)$. *Claramente,* $||T|| = 1$.

Considere agora $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k \in \mathscr{D}(T)$.

Como

$$||x_n - x||_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

vemos que $x_n \to x$ *e* $Tx_n = x_n \to x$, *mas* $(x, x) \notin \mathscr{G}(T)$ *pois* $x \notin \mathscr{D}(T)$.

Proposição 4.24 *Sejam* X *um EVN,* Y *um espaço de Banach e* $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ *um operador linear limitado e fechado. Então* $\mathscr{D}(T)$ *é fechado.*

Demonstração:

Seja $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$. Tome $x_n \in \mathscr{D}(T)$ tal que $x_n \to x$.

Como T é limitado,

$$||Tx_n - Tx_m|| \leq ||T||\,||x_n - x_m||.$$

Logo, $(T(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em Y, que é completo. Portanto, $Tx_n \to y$ para algum $y \in Y$.

Dessa forma, temos $x_n \to x \in X$ e $Tx_n \to y$ em Y. Como T é fechado, $(x, y) \in \mathscr{G}(T)$. Segue que $x \in \mathscr{D}(T)$.

$\square$

Proposição 4.25 *Se* X *e* Y *são EVN,* $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ *é limitado e* $\mathscr{D}(T)$ *é fechado então* T *é fechado.*

Demonstração:

Se $x_n \in \mathscr{D}(T)$ converge para $x \in X$ e Tx_n converge para $y \in Y$ então $x \in \mathscr{D}(T)$ e, portanto, $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$.

$\square$

O próximo teorema nos diz que se os espaços considerados forem de Banach, todo operador linear fechado é limitado se seu domínio for fechado.

Teorema 4.26 (Teorema do gráfico fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ um operador linear fechado. Se $\mathscr{D}(T)$ é fechado então T é limitado.*

Demonstração:

Como $\mathscr{D}(T) \subset X$ e $\mathscr{G}(T) \subset X \times Y$ são fechados e X e $X \times Y$ são espaços de Banach, $\mathscr{D}(T)$ e $\mathscr{G}(T)$ são completos.

Seja $P : \mathscr{G}(T) \to \mathscr{D}(T)$ a projeção dada por $P(x, Tx) = x$. P é sobrejetor.

Agora, se $P(x_1, Tx_1) = P(x_2, Tx_2)$ então $x_1 = x_2$ e, consequentemente, $Tx_1 = Tx_2$.

Portanto, P é uma bijeção.

P é limitado pois para todo $x \in X$,

$$||P(x, Tx)|| = ||x|| \leq ||x|| + ||Tx|| = ||(x, Tx)||$$

Pelo teorema da aplicação aberta, P^{-1} é limitado. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$C||x|| \geq ||P^{-1}(x)|| = ||(x, Tx)|| = ||x|| + ||Tx|| \geq ||Tx||.$$

Portanto, T é limitado.

$\square$

Corolário 4.27 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ um operador linear. Se $\mathscr{D}(T)$ é fechado então T é limitado se e somente se T é fechado. Em particular, se $\mathscr{D}(T) = X$ então T é limitado se e somente se T é fechado.*

Demonstração:

Basta combinar o Teorema 4.26 e a Proposição 4.25.

$\square$

Capítulo 5

Espaços reflexivos

Definição 5.1 *O bidual de um EVN X é o dual de seu dual e será denotado por $X^{**} = (X^*)^*$.*

Seja X um EVN. Dado $x \in X$ defina $C(x) : X^* \to \mathbb{K}$ por

$$C(x)(f) = f(x), \quad f \in X^*.$$

Mostremos que $C(x) \in X^{**}$.

• Linearidade

Dados $f, g \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$C(x)(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = C(x)(f) + \lambda C(x)(g).$$

• Limitação

Se $X = \{0\}$ então $X^* = \{0\}$ e o resultado é trivial.

Suponha que $X \neq \{0\}$. Pelo Corolário 4.6 temos

$$||x|| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||=1}} |C(x)(f)| = ||C(x)||. \tag{5.2}$$

Assim, podemos definir $C : X \to X^{**}$ por $X \ni x \mapsto C(x) \in X^{**}$.

Mostremos que C é linear. Dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, para todo $f \in X^*$ temos

$$C(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

$$= C(x)(f) + \lambda C(y)(f) = (C(x) + \lambda C(y))(f),$$

ou seja, $C(x+\lambda y) = C(x)+\lambda C(y)$. Dessa forma, por (5.2) C é uma imersão isométrica linear. Em particular, C é injetora.

C é chamada de aplicação canônica.

Definição 5.3 *Sejam X um EVN e $C : X \to X^{**}$ a aplicação canônica. Dizemos que X é um espaço reflexivo se C for sobrejetora.*

Exemplo 5.4 *Todo EVN de dimensão finita é reflexivo.*

De fato, como $\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$ e $C : X \to X^{**}$ é injetora, segue que C também é sobrejetora.

Exemplo 5.5 *Se $1 < p < \infty$ então $\ell^p(\mathbb{K})$ é reflexivo.*

Seja $C : \ell^p \to (\ell^p)^{**}$ a aplicação canônica.

Seja $q = p/(p-1)$. Como no Exemplo 2.20, colocando $e_k = (\delta_{kj}) \in \ell^p \cap \ell^q$, sendo δ_{kj} a função de δ de Kronecker, definimos as isometrias lineares

$$T : (\ell^p)^* \longrightarrow \ell^q \quad e \quad S : (\ell^q)^* \longrightarrow \ell^p$$

por $Tf = (f(e_k))$, $f \in (\ell^p)^*$, e $Sg = (g(e_k))$, $g \in (\ell^q)^*$.

Seja $z \in (\ell^p)^{**}$, isto é, $z : (\ell^p)^* \to \mathbb{K}$ linear e limitado.

Como $T^{-1} : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)^*$ e $z : (\ell^p)^* \to \mathbb{K}$ são limitados, temos que $g \doteq zT^{-1} \in (\ell^q)^*$.

Seja $x \doteq (x_k) = Sg = (g(e_k)) \in \ell^p$, isto é, $S^{-1}x = g \in (\ell^q)^*$.

Dado $f \in (\ell^p)^*$, $y \doteq (y_k) = Tf = (f(e_k)) \in \ell^q$.

Assim,

$$z(f) = (zT^{-1})(y) = g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k g(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k)g(e_k),$$

mas

$$C(x)(f) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(e_k)f(e_k).$$

Portanto, $z(f) = C(x)(f)$ para todo $f \in (\ell^p)^*$, ou seja, $z = C(x)$.

Teorema 5.6 *Todo EVN reflexivo é Banach.*

Demonstração:

Seja X um EVN reflexivo.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X.

Se $C : X \to X^{**}$ é a aplicação canônica então

$$||C(x_n) - C(x_m)|| = ||C(x_n - x_m)|| = ||x_n - x_m||.$$

Portanto, $(C(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em $X^{**} = (X^*)^*$, que é completo. Logo, existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $C(x_n) \to x^{**}$.

Como X é reflexivo, existe $x \in X$ tal que $x^{**} = C(x)$.

Portanto,

$$||x_n - x|| = ||C(x_n - x)|| = ||C(x_n) - C(x)|| = ||C(x_n) - x^{**}|| \to 0.$$

$\square$

Exemplo 5.7 $X = C([0,1];\mathbb{R})$ *com a norma* $||x||_1 = \int_0^1 |x(t)|\, dt$ *não é reflexivo.*

Teorema 5.8 *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração:

Seja X um espaço de Hilbert.

Considere a aplicação $A : X^* \to X$ definida na Observação 3.64.

Para cada $f \in X^*$, $Af \in X$ é o único vetor que satisfaz $f(x) = \langle x, A(f)\rangle$ para todo $x \in X$. Além do mais, $||A(f)|| = ||f||$.

Lembre que se $f, g \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$A(f + \lambda g) = A(f) + \overline{\lambda} A(g).$$

Para $f, g \in X^*$ defina

$$\langle f, g\rangle_* = \langle A(g), A(f)\rangle.$$

A fórmula acima define um produto interno em X^*. De fato,

(PI1)
$$\langle f+g,h\rangle_* = \langle A(h), A(f+g)\rangle = \langle A(h), A(f)+A(g)\rangle$$
$$= \langle A(h), A(f)\rangle + \langle A(h), A(g)\rangle = \langle f,h\rangle_* + \langle g,h\rangle_*, \quad \forall f,g,h \in X^*;$$

(PI2)
$$\langle \lambda f, g\rangle_* = \langle A(g), A(\lambda f)\rangle = \langle A(g), \overline{\lambda} A(f)\rangle$$
$$= \lambda \langle A(g), A(f)\rangle = \lambda \langle f, g\rangle_*, \quad \forall f,g \in X^*, \lambda \in \mathbb{K};$$

(PI3)
$$\langle f,g\rangle_* = \langle A(g), A(f)\rangle = \overline{\langle A(f), A(g)\rangle} = \overline{\langle g,f\rangle_*}, \quad \forall f,g \in X^*;$$

(PI4)
$$\langle f,f\rangle_* = \langle A(f), A(f)\rangle \geq 0, \quad \forall f \in X^*;$$

(PI5)
$$\langle f,f\rangle_* = 0 \Leftrightarrow \langle A(f), A(f)\rangle = 0 \Leftrightarrow ||A(f)||^2 = 0 \Leftrightarrow ||f||^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Seja $||\cdot||_*$ a norma associada a este produto interno.

Dado $f \in X^*$ temos
$$||f||_*^2 = \langle f,f\rangle_* = \langle A(f), A(f)\rangle = ||A(f)||^2 = ||f||^2,$$
ou seja, $||\cdot||_*$ coincide com a norma usual de X^*. Como X^* com a norma usual é completo, X^* com $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ é um espaço de Hilbert.

Seja $C : X \to X^{**}$ a aplicação canônica. Dado $g \in X^{**}$, existe um único (Riesz) $f_0 \in X^*$ tal que para todo $f \in X^*$,
$$g(f) = \langle f, f_0\rangle_* = \langle A(f_0), A(f)\rangle = f(A(f_0)) = C(A(f_0))(f),$$
isto é, $C(A(f_0)) = g$.

$\square$

Antes de demonstrar o próximo resultado mostremos que qualquer subconjunto de um espaço métrico separável é separável. Vamos utilizar a caracterização que diz que um espaço métrico é separável se e somente se possui uma base enumerável de abertos.

Sejam X um espaço métrico separável e $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X$ um conjunto enumerável e denso em X. Considere $B = \{B(x_n, r); n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$. B é uma base enumerável de abertos X e, portanto, para todo $Y \subset X$, $B_Y = \{B(x_n, r) \cap Y; n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ é uma base enumerável de abertos de Y.

Teorema 5.9 *Seja X um EVN. Se X^* é separável então X também é.*

Demonstração:

Seja $B = \{f \in X^*; ||f|| = 1\}$. Como X^* é separável, B também é.

Seja $\{f_n \in B, n \in \mathbb{N}\}$ denso em B.

Como

$$||f_n|| = \sup_{||x||=1} |f_n(x)| = 1$$

existe $x_n \in X$ tal que $||x_n|| = 1$ e $|f_n(x_n)| \geq 1/2$.

Seja $Y = \overline{[x_1, x_2, \dots]} \subset X$. Note que Y é separável pois

$$Z \doteq \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} x_k ; \gamma_k^{(n)} \in \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{se } \mathbb{K}=\mathbb{R}} \text{ ou } \underbrace{\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}}_{\text{se } \mathbb{K}=\mathbb{C}} \right\}.$$

é denso em Y. De fato, dados $y \in Y$ e $\varepsilon > 0$ tome $z \in [x_1, x_2, \dots]$ tal que $||y - z|| < \varepsilon/2$. Como $z \in [x_1, x_2, \dots]$ podemos escrever $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Tome $\gamma_k \in \mathbb{Q}$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou $\gamma_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $k = 1, \dots, n$ de modo que $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \gamma_k| < \varepsilon/2$.

Temos $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k \in Z$ e

$$||y - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k|| \leq ||y - z|| + ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k||$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \gamma_k| ||x_k|| = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \gamma_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suponha que $Y \neq X$. Como Y é fechado, pelo Corolário 4.9 existe $f \in X^*$ tal que $||f|| = 1$ e $f = 0$ em Y. Como $f \in B$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f|| < 1/2$.

Como $x_n \in Y$, $f(x_n) = 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| = |(f_n - f)(x_n)|$$

$$\leq ||f_n - f|| \, ||x_n|| = ||f_n - f|| < \frac{1}{2},$$

um absurdo.

Portanto, $X = Y$ e X é separável.

□

Corolário 5.10 *Seja X um EVN separável tal que X^* não é separável. Então X não é reflexivo.*

Demonstração:

Se X fosse reflexivo então a aplicação canônica $C : X \to X^{**}$ seria uma isometria linear. Como existe $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset X$ que é denso em X então $C(D) = \{C(x_n); n \in \mathbb{N}\} \subset X^{**}$ é denso em X^{**}. De fato, dada uma bola aberta $B(x^{**}, r) \subset X^{**}$, como C é contínua, $C^{-1}(B(x^{**}, r))$ é aberto em X e é não vazio pois C é sobrejetora. Logo, existe $x_n \in C^{-1}(B(x^{**}, r))$ e, portanto, $C(x_n) \in B(x^{**}, r)$. Portanto, X^{**} é separável.

Como X^{**} é o dual de X^*, pelo Teorema 5.9 X^* também seria separável.

□

Exemplo 5.11 *$\ell^1(\mathbb{K})$ não é reflexivo.*

Vejamos antes que $\ell^p(\mathbb{K})$ é separável se $1 \leq p < \infty$. Já vimos na Observação 3.59 que $\ell^2(\mathbb{K})$ é separável.

Suponha que $1 \leq p < \infty$.

Se $e_k = (\delta_{kj})$ então pelos Exemplo 2.19 e Exemplo 2.20 temos que

$$\ell^p \ni x = (x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\gamma_k \in \mathbb{Q}$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que $|x_k - \gamma_k| < 2^{-k/p}\varepsilon/2$.

Assim, se $n \in \mathbb{N}$ *é tal que* $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < (\varepsilon/2)^p$ *então*

$$
\begin{aligned}
||x - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k||_p &= ||\sum_{k=1}^{n} (x_k - \gamma_k) e_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k||_p \\
&\leq ||\sum_{k=1}^{n} (x_k - \gamma_k) e_k||_p + ||\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k||_p \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - \gamma_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \\
&< \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} (\varepsilon/2)^p \right)^{1/p} + \varepsilon/2 < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ou seja, o conjunto enumerável

$$
\bigcup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k ; \gamma_k^{(n)} \in \underbrace{\mathbb{Q}}_{se\ \mathbb{K}=\mathbb{R}} \ \ ou\ \ \underbrace{\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}}_{se\ \mathbb{K}=\mathbb{C}} \right\}.
$$

é denso em ℓ^p.

Por outro lado, ℓ^∞ *não é separável. De fato, suponha que exista um conjunto* $D = \{d_n \in \ell^\infty, n \in \mathbb{N}\}$ *que seja denso em* ℓ^∞.

Seja

$$
A = \{(x_n); x_n \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty,
$$

que é não é enumerável pois é o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ *que tem cardinalidade* $2^{\aleph_0}$.

Dados $x, y \in A$ *com* $x \neq y$, *as bolas abertas* $B(x, 1/2)$ *e* $B(y, 1/2)$ *são disjuntas pois se* $z \in B(x, 1/2) \cap B(y, 1/2)$ *então teríamos*

$$
1 = ||x - y||_\infty \leq ||x - z||_\infty + ||z - y||_\infty < 1,
$$

uma contradição.

Mas como D *é denso, existe pelo menos um ponto de* D *em cada uma das bolas* $B(x, 1/2)$, $x \in \ell^\infty$. *Para cada* $x \in A$, *como* $D \cap B(x, 1/2) \neq \varnothing$ *podemos definir* $\varphi(x) = d_{n_x}$ *sendo* $n_x = \min\{n \in \mathbb{N}; d_n \in B(x, 1/2)\}$. *Como* $x, y \in A$

com $x \neq y$ *implica em* $B(x, 1/2) \cap B(y, 1/2) = \varnothing$, $d_{n_x} \neq d_{n_y}$. *Portanto,* $\varphi : A \to D$ *é injetora. Logo, a cardinalidade de* D *é no mínimo igual a cardinalidade de* A, *o que é incorreto.*

Finalmente, como o dual de ℓ^1 *é o* ℓ^∞, ℓ^1 *é separável e* ℓ^∞ *não é separável então* ℓ^1 *não é reflexivo (Corolário 5.10).*

Capítulo 6

Convergências forte e fraca

6.1 Convergências forte e fraca de sequências em EVN

Definição 6.1 *Seja X um EVN. Dizemos que uma sequência (x_n) de elementos de X converge fracamente para $x \in X$ se $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$. Usaremos a notação $x_n \xrightarrow{w} x$ e x é chamado de limite fraco da sequência (x_n).*

A convergência usual $x_n \to x$, isto é, se $||x_n - x|| \to 0$ será chamada, quando for conveniente, de convergência forte da sequência x_n.

Lema 6.2 *Sejam X um EVN e (x_n) sequência em X que converge fracamente para x. Então*

1. *o limite fraco é único;*

2. *qualquer subsequência de (x_n) converge fracamente para x;*

3. *$(||x_n||)$ é limitada.*

Demonstração:

1. Suponha que $x_n \xrightarrow{w} y \in X$ também.

Para qualquer $f \in X^*$ temos $f(x_n) \to f(x) \in \mathbb{K}$ e $f(x_n) \to f(y) \in \mathbb{K}$. Portanto, $f(x) = f(y)$ para todo $f \in X^*$, ou seja, $f(x-y) = 0$ para todo $f \in X^*$. Pelo Corolário 4.7, $x - y = 0$, ou seja, $x = y$.

2. Para todo $f \in X^*$, $f(x_{n_k}) \to f(x)$ pois $(f(x_{n_k}))$ é subsequência da sequência numérica $(f(x_n))$ que converge para $f(x) \in \mathbb{K}$. Portanto, $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$.

3. Como para cada $f \in X^*$ a sequência $(f(x_n))$ é convergente, existe $C_f > 0$ tal que $|f(x_n)| \leq C_f$ para todo $n \geq 1$.

Se $C : X \to X^{**}$ é a aplicação canônica, coloque $g_n = C(x_n) \in X^{**}$. Com esta notação temos, para cada $f \in X^*$, $|g_n(f)| = |C(x_n)(f)| = |f(x_n)| \leq C_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como X^* é Banach, pelo Corolário 4.12, existe $C > 0$ tal que $||g_n|| \leq C$ para todo $n \geq 1$.

Como $||g_n|| = ||C(x_n)|| = ||x_n||$ temos $||x_n|| \leq C$ para todo $n \geq 1$.

$\square$

Proposição 6.3 *Sejam X um EVN e (x_n) uma sequência em X. Temos que*

1. *se $x_n \to x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$;*
2. *se X tem dimensão finita e $x_n \xrightarrow{w} x$ então $x_n \to x$.*

Demonstração:

1. Basta ver que se $f \in X^*$ então

$$|f(x_n) - f(x)| \leq ||f||\,||x_n - x||.$$

2. Seja k a dimensão de X. Tome uma base $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ de X e $\mathscr{B}^* = \{f_1, \ldots, f_k\}$ sua base dual.

Como $x, x_n \in X$ podemos escrever $x = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j e_j$ e $x_n = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(n)} e_j$.

Para cada $j = 1, \ldots, k$, $f_j(x_n) = \gamma_j^{(n)} \to f_j(x) = \gamma_j$.

Portanto, colocando $C = \max\{||e_1||, \ldots, ||e_k||\}$, temos

$$||x_n - x|| = ||\sum_{j=1}^{k} \gamma_j^{(n)} e_j - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j e_j||$$

$$= ||\sum_{j=1}^{k}(\gamma_j^{(n)} - \gamma_j)e_j|| \leq C\sum_{j=1}^{k}|\gamma_j^{(n)} - \gamma_j| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

Exemplo 6.4 *Sejam X um espaço de Hilbert de dimensão infinita e (e_n) uma sequência ortonormal. Mostremos que $e_n \xrightarrow{w} 0$ mas (e_n) não converge no sentido forte.*

Dado $f \in X^*$ tome o único $z \in X$ tal que $f(x) = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in X$. Pela desigualdade de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n, z\rangle|^2 \leq ||z||^2$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0$.

Como para $n \neq m$ temos

$$||e_n - e_m||^2 = ||e_n||^2 + ||e_m||^2 = 2$$

e assim (e_n) não é de Cauchy. Logo, diverge.

Exemplo 6.5 *Sejam X um espaço de Hilbert e (x_n) uma sequência em X. Como cada $f \in X^*$ é da forma $f(x) = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in X$, para algum $z \in X$ então*

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff \langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle \quad \textit{para todo } z \in X.$$

Proposição 6.6 *Sejam X um EVN e (x_n) sequência em X. Temos que $x_n \xrightarrow{w} x$ se e somente se valem*

1. *(x_n) é limitada*
2. *existe $M \subset X^*$ total, isto é, $\overline{\langle M\rangle} = X^*$, tal que para cada $f \in M$ tem-se $f(x_n) \to f(x)$.*

Demonstração:

Suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$.

Pelo Lema 6.2, (x_n) é limitada. Portanto, vale *1.*

A condição *2* é trivial pois X^* é total.

Reciprocamente, suponha que (x_n) satisfaça as condições *1* e *2.* Por *1*, existe $C > 0$ tal que $||x||, ||x_n|| \leq C$ para todo $n \geq 1$.

Seja $f \in X^*$. Como $\overline{\langle M \rangle} = X^*$ existe uma sequência (f_j) de elementos de $\langle M \rangle$ convergindo para f. Dado $\varepsilon > 0$ tome $j \geq 1$ tal que

$$||f - f_j|| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Como $f_j \in \langle M \rangle$, podemos escrever $f_j = \sum_{k=1}^{m_j} \gamma_k^{(j)} g_k^{(j)}$ com $g_k^{(j)} \in M$ e $\gamma_k^{(j)} \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, m_j$.

Por *2*, $g_k^{(j)}(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g_k^{(j)}(x)$, para todo $k = 1, \ldots, m_j$.

Portanto, $f_j(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_j(x)$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $|f_j(x_n) - f_j(x)| < \varepsilon/3$.

Se $n \geq n_0$ então

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - f_j(x_n)| + |f_j(x_n) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)|$$

$$\leq ||f - f_j||\,||x_n|| + \frac{\varepsilon}{3} + ||f_j - f||\,||x|| < \frac{\varepsilon}{3C} \cdot C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C} \cdot C = \varepsilon.$$

□

Corolário 6.7 *Considere o espaço* $\ell^p = \ell^p(\mathbb{K})$ *com* $1 < p < \infty$.

Sejam $(x_n) = ((x_k^{(n)}))$ *uma sequência em* ℓ^p *e* $x_0 = ((x_k^{(0)})) \in \ell^p$.

Então $x_n \xrightarrow{w} x_0$ *se e somente se*

1. (x_n) *é limitada*
2. *para cada* $k \geq 1$ *tem-se* $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)}$.

Demonstração:

Se $x_n \xrightarrow{w} x_0$ então pela Proposição 6.6 a sequência (x_n) é limitada, isto é, vale *1.*

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $f_k : \ell^p \to \mathbb{K}$ dado por $f_k(y) = f_k((y_j)) = y_k$. É imediato que f_k é linear. Como

$$|f_k(y)|^p = |f_k((y_j))|^p = |y_k|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p = ||y||_p^p$$

temos que $f \in (\ell^p)^*$.

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x_0) = x_k^{(0)},$$

ou seja, vale *2.*

Reciprocamente, suponha que valham *1* e *2.*

Basta mostrarmos que existe um conjunto total em $(\ell^p)^*$ satisfazendo a condição *2* da Proposição 6.6.

Pelo Exemplo 2.20, sabemos que dual de ℓ^p é isométrico a ℓ^q, sendo q o expoente conjugado de p. Seja $S : \ell^q \to (\ell^p)^*$ a inversa da isometria linear $T : (\ell^p)^* \longrightarrow \ell^q$ introduzida naquele mesmo exemplo.

Lembre que T é definido a partir das sequências $e_k = (\delta_{kj})$ por $T(f) = (f(e_k))$. Assim, dado $x \in \ell^q$ temos $x = TSx = (Sx(e_k))$. Como $e_k \in \ell^p \cap \ell^q$, $k \in \mathbb{N}$, em particular, $e_\ell = (Se_\ell(e_k))$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$, ou seja, $Se_\ell(e_k) = \delta_{k\ell}$.

Já vimos que o conjunto $N = \{e_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \ell^q$, $e_k = (\delta_{kj})$, é total. Verifiquemos que $M \doteq S(N) = \{Se_k, k \in \mathbb{N}\} \subset (\ell^p)^*$ é total.

Dado $f \in (\ell^p)^*$, seja $x = S^{-1}f = Tf \in \ell^q$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $S(B(x,\delta)) \subset B(f,\varepsilon)$.

Como $\overline{\langle N \rangle} = \ell^q$, existem $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_{k=1}^m \gamma_k e_k \in B(x,\delta)$. Portanto,

$$\langle M \rangle \ni \sum_{k=1}^{m} \gamma_k S e_k = S(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k e_k) \in B(f,\varepsilon),$$

ou seja, $\langle M \rangle$ é denso em $(\ell^p)^*$.

Agora, como para cada $\ell \in \mathbb{N}$,

$$Se_\ell(x_0) = Se_\ell((x_k^{(0)})) = Se_\ell(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} Se_\ell(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} \delta_{k\ell} = x_\ell^{(0)}$$

e

$$Se_\ell(x_n) = Se_\ell((x_k^{(n)})) = Se_\ell(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} Se_\ell(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} \delta_{k\ell} = x_\ell^{(n)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_\ell^{(n)} = x_\ell^{(0)}$ vemos que $\lim_{n\to\infty} Se_\ell(x_n) = Se_\ell(x_0)$. Assim, M satisfaz a condição *2* da Proposição 6.6.

□

6.2 Convergência de sequências de operadores e funcionais lineares

Definição 6.8 *Sejam X e Y EVN, $T : X \to Y$ um operador linear e (T_n) uma sequência em $\mathscr{B}(X, Y)$. Dizemos que*

1. *(T_n) converge uniformemente ou em norma para T se $||T_n - T|| \to 0$;*

2. *(T_n) converge fortemente para T se para todo $x \in X$, $T_n x \to Tx$, isto é, $||T_n x - Tx|| \to 0$;*

3. *(T_n) converge fracamente para T se para todo $x \in X$, $T_n x \xrightarrow{w} Tx$, isto é, para todo $f \in Y^*$, $f(T_n x) \to f(Tx)$.*

Observação 6.9 *Note que*

- *em 1, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ pois como T_n e $T_n - T \in \mathscr{B}(X, Y)$ temos $T = T_n - (T_n - T) \in \mathscr{B}(X, Y)$.*

- *em 2, se X for Banach então $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. De fato, como para cada $x \in X$ a sequência $(T_n x)$ é limitada, pelo princípio da limitação uniforme, existe $C > 0$ tal que $||T_n|| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $x \in X$,*

$$||Tx|| = ||\lim_{n\to\infty} T_n x|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n x|| \leq \limsup_{n\to\infty} ||T_n|| \, ||x|| \leq C||x||.$$

- *em 3, se X for Banach então $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. De fato, dado $x \in X$, pela Proposição 6.6, $(T_n x)$ é limitada. Pelo princípio da limitação uniforme, existe $C_0 > 0$ tal que $||T_n|| \leq C_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

  Portanto, para todo $x \in S = \{x \in X; ||x|| = 1\}$ e $f \in Y^*$,

  $$|f(Tx)| = \lim_{n\to\infty} |f(T_n x)| \leq \limsup_{n\to\infty} ||f||||T_n||\,||x|| \leq C_0||f||.$$

  Se $C : Y \to Y^{**}$ é aplicação canônica então

  $$\{f(Tx); x \in S\} = \{C(Tx)(f); x \in S\}$$

  é limitado para cada $f \in Y^*$. Como Y^* é Banach, pelo princípio da limitação uniforme, a família de funcionais lineares limitados

  $$\{C(Tx) : Y^* \to \mathbb{K}\}_{x\in S}$$

  é limitada, isto é, existe $C' > 0$ tal que $||C(Tx)|| \leq C'$ para todo $x \in S$.

  Como C é uma imersão isométrica, $||Tx|| \leq C'$ para todo $x \in S$. Portanto, T é limitado.

- *Como*

  $$|f(T_n x) - f(Tx)| \leq ||f||\,||T_n x - Tx|| \leq ||f||\,||x||\,||T_n - T||,$$

  vemos que se T_n converge em norma para T então T_n converge fortemente para T. Também, se T_n converge fortemente para T então T_n converge fracamente para T.

.

Exemplo 6.10 *Neste exemplo exibimos uma sequência de operadores limitados convergindo fortemente para operador ilimitado.*

Considere em ℓ^2 o subespaço $X = [e_1, e_2, \dots]$, $e_k = (\delta_{kj})$.

Dado $x = (x_n) \in X$ temos que $x_n = 0$ para todo n suficientemente grande. Dado $x \in X$, defina

$$T_n x = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

Como $T_n x$ também se anula para todo n suficientemente grande, $T_n x \in X$. Claramente, T_n é linear e

$$||T_n x||_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |kx_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq n^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = n^2 ||x||_2^2,$$

ou seja, $T_n \in \mathscr{B}(X)$.

Seja $T : X \to X$ dado por $T(x) = (nx_n)$. Dado $x \in X$ tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ se $n > N$. Se $n > N$ então $nx_n = 0$ e $T_n x = Tx$. Portanto, T_n converge fortemente para T.

Seja $e_n = (\delta_{nk})$. Como $||e_n||_2 = 1$ e $||T(e_n)||_2 = ||ne_n||_2 = n$, vemos que T não é limitado. Note que X não é Banach.

Exemplo 6.11 *A seguir mostramos uma sequência de operadores limitados convergindo fortemente mas que não converge em norma.*

Dado $x = (x_k) \in \ell^2$ coloque $T_n x = (y_k)$ sendo $y_k = 0$ se $k = 1, \dots, n$ e $y_k = x_k$ se $k \geq n+1$, isto é, se $e_k = (\delta_{kj})$ então

$$T_n x = T_n(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

Claramente $T_n : \ell^2 \to \ell^2$, T_n é linear e $||T_n x||_2 \leq ||x||_2$. Note que $||T_n|| \leq 1$.

Como

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n x||_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 = 0,$$

segue que T_n converge fortemente para o operador nulo.

Se T_n convergisse em norma para algum T então, como $||T_n x - Tx||_2 \leq ||T_n - T||\,||x||_2$, deveríamos ter $T = 0$. Vejamos que isto não ocorre.

Considere a sequência $y_n = (y_k^{(n)})$ dada por $y_k^{(n)} = 0$ se $k = 1, \dots, n$ e $y_k^{(n)} = 2^{(n-k)/2}$ se $k \geq n+1$.

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^{(n-k)/2})^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{n-k} = 1,$$

temos $||y_n||_2 = 1$.

No entanto, como $T_n x_n = x_n$, *temos* $||T_n x_n||_2 = 1$ *e, consequentemente,* $||T_n|| = 1$. *Portanto,* $||T|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n|| = 1$.

Exemplo 6.12 *Vejamos agora uma sequência de operadores que converge fracamente mas não fortemente.*

Dado $x = (x_k) \in \ell^2$ *coloque* $Tx = (y_k)$ *sendo* $y_k = 0$ *se* $k = 1, \dots, n$ *e* $y_k = x_{k-n}$ *se* $k \geq n+1$, *isto é, se* $e_k = (\delta_{kj})$ *então*

$$T_n(x) = T_n(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_{k-n} e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\ vezes}, x_1, x_2, \dots).$$

Claramente $T_n : \ell^2 \to \ell^2$, T_n *é linear e* $||T_n x||_2 = ||x||_2$.

Note que se $n > m \geq 1$ *então* $||T_n e_1 - T_m e_1||_2 = \sqrt{2}$ *e, portanto,* $(T_n e_1)$ *é divergente. Dessa forma,* T_n *não converge fortemente.*

Dado $f \in (\ell^2)^*$, *temos* $f(y) = \langle y, z\rangle$, $y \in \ell^2$, *para algum* $z = (z_k) \in \ell^2$.

Para cada $x = (x_k) \in \ell^2$

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z\rangle = \langle (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots), (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots)\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{z_{k+n}}$$

e

$$|f(T_n x)|^2 \leq ||x||_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} |z_{k+n}|^2 = ||x||_2^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |z_k|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

No caso de funcionais lineares limitados, as noções de convergência forte e fraca coincidem pela Proposição 6.3, pois $Y = \mathbb{K}$ tem dimensão finita. Essa convergência será chamada de fraca* (fraca estrela): a sequência (f_n), $f_n \in X^*$, converge para o *limite fraco** $f \in X^*$ se $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$. A notação usada é $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

O limite uniforme da sequência (f_n) é também chamado de limite forte quando se trata de funcionais lineares. Isto significa que $||f_n - f|| \to 0$ para algum $f \in X^*$. Usamos a notação usual $f_n \to f$. f é chamado de *limite forte* de (f_n).

Há também a noção de limite fraco para sequência (f_n). Isto significa que $g(f_n) \to g(f)$ para algum $f \in X^*$, para todo $g \in X^{**}$. Se f_n converge para f neste sentido fraco então $f_n \xrightarrow{w^*} f$. De fato, se $C : X \to X^{**}$ é a aplicação canônica e $x \in X$ então, como $C(x) \in X^{**}$,

$$f_n(x) = C(x)(f_n) \to C(x)(f) = f(x).$$

Proposição 6.13 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T_n \in \mathscr{B}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Então (T_n) converge fortemente se e somente se*

1. *$(||T_n||)$ é limitada*

2. *existe um conjunto total $M \subset X$ tal que $(T_n x)$ é de Cauchy em Y para todo $x \in M$.*

Demonstração:

Suponha que $T_n \to T$ fortemente.

Seja $x \in X$. Como $(T_n x)$ converge, é limitada. Logo, pelo princípio da limitação uniforme, $(||T_n||)$ é limitada. Logo, vale *1.*

A condição *2* é imediata tomando-se $M = X$.

Reciprocamente, suponha que (T_n) satisfaça as condições *1* e *2.*

Por *1*, existe $C > 0$ tal que $||T_n|| \leq C$ para todo $n \geq 1$.

Seja $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\overline{\langle M \rangle} = X$ existe $y \in \langle M \rangle$ tal que

$$||x - y|| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Pela condição *2*, $(T_n y)$ é de Cauchy pois y é uma combinação linear de elementos de M (o argumento é similar ao que foi usado na demonstração da Proposição 6.13). Portanto, existe $N \geq 1$ tal que $||T_n y - T_m y|| < \varepsilon/3$ para todos $n, m \geq N$.

Assim, para $n, m \geq N$

$$||T_n x - T_m x|| \leq ||T_n x - T_n y|| + ||T_n y - T_m y|| + ||T_m y - T_m x||$$

$$\leq ||T_n|| \, ||x - y|| + \frac{\varepsilon}{3} + ||T_m|| \, ||x - y|| \leq 2C||x - y|| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Portanto, $(T_n x)$ é de Cauchy em Y, que é Banach. Logo, $(T_n x)$ converge.

□

Como para sequência de funcionais lineares a convergência fraca* é sinônimo de convergência forte para operadores, temos o seguinte

Corolário 6.14 *Sejam X um espaço de Banach e (f_n) uma sequência em X^*. Então (f_n) converge no sentido fraco* se e somente se*

1. *$(||f_n||)$ é limitada*
2. *existe um conjunto total $M \subset X$ tal que $(f_n x)$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$ para todo $x \in M$.*

6.3 Adjunto de um operador

Sejam X, Y EVN e $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.

Dado $g \in Y^*$ defina $T'g : X \to \mathbb{K}$ por $T'g(x) = g(Tx)$, $x \in X$. Ou seja, T' satisfaz $T'g = gT$.

Como
$$|T'g(x)| = |gTx| \leq ||g|| \, ||T|| \, ||x||,$$
vemos que $T'g \in X^*$ e
$$||T'g|| \leq ||T|| \, ||g||. \tag{6.15}$$

Definimos o adjunto de T por $T' : Y^* \to X^*$ por $Y^* \ni g \mapsto T'g \in X^*$.

• T' é linear.

De fato, se $g, h \in Y^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então para todo $x \in X$

$$T'(g + \lambda h)(x) = (g + \lambda h)(Tx) = g(Tx) + \lambda h(Tx)$$

$$= T'g(x) + \lambda T'h(x) = [T'g + \lambda T'h](x),$$

portanto, $T'(g + \lambda h) = T'g + \lambda T'h$.

• T' é limitado e $||T'|| = ||T||$

Por (6.15), $||T'|| \leq ||T||$.

Se $x \in X$ é tal que $Tx = 0$ então $0 = ||Tx|| \leq ||T'||\,||x||$. Se $Tx \neq 0$ então pelo Corolário 4.5 existe $g_0 \in Y^*$ tal que $||g_0|| = 1$ e $T'g_0(x) = g_0(Tx) = ||Tx||$. Assim,

$$||Tx|| = |T'g_0(x)| \leq ||T'||\,||g_0||\,||x|| = ||T'||\,||x||$$

e, portanto, $||T|| \leq ||T'||$.

Vejamos como é a relação entre o operador adjunto de Hilbert e o operador adjunto entre dois espaços de Hilbert.

Sejam $(X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1), (X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espaços de Hilbert e $T : X_1 \to X_2$ um operador linear limitado. Usaremos as notações definidas anteriormente para o adjunto de Hilbert $T^* : X_2 \to X_1$ e o operador adjunto $T' : X_2^* \to X_1^*$.

Seja $A_j : X_j^* \to X_j$ a isometria dada por $f(x) = \langle x, A_j f \rangle_j$, $f \in X_j^*$, $= 1, 2$ (veja Obs. 3.64).

Sejam $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. Seja $f_2 = A_2^{-1} x_2$. Temos

$$\langle x_1, T^* x_2 \rangle_1 = \langle Tx_1, x_2 \rangle_2 = \langle Tx_1, A_2 f_2 \rangle_2 = f_2(Tx_1) = (T'f_2)(x_1)$$

$$= \langle x_1, A_1(T'f_2)) \rangle_1 = \langle x_1, A_1(T'A_2^{-1}x_2)) \rangle_1 = \langle x_1, (A_1 T' A_2^{-1}) x_2) \rangle_1,$$

isto é,

$$\langle x_1, T^* x_2 - (A_1 T' A_2^{-1}) x_2) \rangle_1 = 0$$

para todo $x_j \in X_j$.

Portanto,

$$T^* = A_1 T' A_2^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "A_2^{-1}"] & X_1 \\ X_2^* \arrow[r, "T'"] & X_1^* \arrow[u, "A_1"'] \end{tikzcd}$$

Índice Remissivo