PRIMEIRO TEST DRIVE DE ANÁLISE II

26.09.2007

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *(2pt) Defina* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *pondo* $f(0) = 0$ *e* $f(x) = 1/2^n$ *se* $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Prove que* f *é integrável e calcule* $\int_0^1 f(x)\ dx$.

Exercício 2. *(2pt) Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Mostre que a função* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$$

é lipschitziana.

Exercício 3. *(2pt) Com o auxílio de somas de Riemann mostre que para* $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}.$$

Exercício 4. *(2pt) Sejam* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e* $\alpha, \beta\colon I \to [a,b]$ *deriváveis. Defina* $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ *como*

$$\phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\ dt.$$

Prove que ϕ *é derivável e que*

$$\phi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Exercício 5. *(2pt) Faça os seguinte itens*

A. *Mostre que se* $A_i \subset \mathbb{R}$ *têm medida nula, com* $i \in \mathbb{N}$, *então*

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

tem medida nula.

B. *A implicação no item A permanece válida se substituirmos a família* A_i *por uma família NÃO enumerável de conjuntos de medida nula? Justifique sua resposta.*

Exercício 6. *(2pt) Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que*

i. $f(0) = 1$,
ii. $f(x+y) = f(x)f(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Mostre que $f(x) = exp(x)$.

Errata: Este enunciado está incorreto. De fato, destas hipóteses só podemos concluir que $f(x) = exp(cx)$, para algum $c \in \mathbb{R}$, ou, o que é o mesmo, que $f(x) = a^x$ para algum $a > 0$.

URL: `www.icmc.usp.br/~smania/sma308/`