PROVA SUBSTITUTIVA DE ANÁLISE II

19.12.2007

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *(2pt) Sejam* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e* $\alpha, \beta\colon I \to [a,b]$ *deriváveis. Defina* $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ *como*

$$\phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt.$$

Prove que ϕ *é derivável e que*

$$\phi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Exercício 2. *(2pt) Com o auxílio de somas de Riemann mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} sen\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Exercício 3. *(2pt) Se* $f_n \to f$ *e* $g_n \to g$ *uniformemente em* $X \subset \mathbb{R}$*, e* f *e* g *são limitadas em* X*, mostre que* $f_n g_n \to fg$ *uniformemente em* X*.*

Exercício 4. *(2pt) Se uma sequência de funções contínuas* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente num conjunto denso* $D \subset X$*, prove que* f_n *converge uniformemente em* X*.*

Exercício 5. *(2pt) Dado uma série de potências* $\sum a_n x^n$*, sejam* $c > 0$ *e* $M > 0$ *tais que* $|a_n c^n| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Prove que* $(-c, c)$ *está contido no raio de comvergência da série considerada.*

Exercício 6. *(2pt) Seja* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Mostre que a função*

$$g(x) = |f(x)|^2 = < f(x), f(x) >$$

é diferenciável em x_0 *e que sua derivada em* x_0 *é a transformação linear* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$A\,h = 2 < f(x_0), f'(x_0)\,h > .$$

Bibliografia: As questões 1, 2, 3, 4 e 5 são exercícios dos livros Análise Real, Volume 1, por Elon Lages Lima (Coleção Matemática Universitária) e Curso de Análise, vol. 1, também de E. L. Lima (Coleção Projeto Euclides).

URL: `www.icmc.usp.br/~smania/sma308/`