TERCEIRA PROVA DE ANÁLISE II

12.12.2007

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *(2pt) Prove que a função* $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, onde* r *é o raio de convergência desta série, é uma função par se e somente se* $a_n = 0$ *para todo* n *ímpar.*

Exercício 2. *(2pt) Se* $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R}^\star$*, prove que as séries de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$$

têm ambas raio de convergência igual a $1/\sqrt{L}$*.*

Exercício 3. *(2pt) Prove que a função*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \big(\frac{x}{2}\big)^{2n}$$

está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ *e que* $f'' + \frac{f'}{x} + f = 0$ *para todo* $x \neq 0$*.*

Exercício 4. *(2pt) Encontre a série de potências centrada em* 0 *que coincide com a função racional*

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

em uma vizinhança de 0*.Sug: Frações parciais.*

Exercício 5. *(2pt) Seja* $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* A*, onde* A *é um aberto conexo de* $\mathbb{R}^n$*. Mostre que* f *é constante e e somente se* $f'(a) = 0$*, para todo* $a \in A$*.*

Exercício 6. *(2pt) Seja* $f\colon E \to \mathbb{R}$*, onde* E *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$*, uma função diferenciável tal que* f *tem um máximo local em um ponto* $x_0 \in E$*. Mostre que* $f'(x_0) = 0$*.*

Bibliografia: As questões 1, 2, 3 são exercícios do livro Análise Real, Volume 1, por Elon Lages Lima (Coleção Matemática Universitária). As questões 5 e 6 são exercícios do livro Principles of Mathematical Analysis, por Walter Rudin.

URL: `www.icmc.usp.br/~smania/sma308/`