SEGUNDA PROVA DE ANÁLISE II

14.11.2007

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *(2pt) Prove que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ *converge quando* x *pertence ao intervalo* $(-1,1]$ *e que a convergência é uniforme em todos intervalos do tipo* $[-1+\delta, 1-\delta]$, *onde* $0<\delta<1/2$.

Exercício 2. *(2pt) Seja* $p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *um polinômio de grau maior ou igual à* 1. *Mostre que a sequência de funções* $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dadas por* $f_n(x)=p(x)+1/n$, *converge uniformemente para* p *em* $\mathbb{R}$ *porém* f_n^2 *não converge uniformemente para* p^2.

Exercício 3. *(2pt) Dada uma sequência de funções* $f_n\colon X\to\mathbb{R}$, *suponha que existe* $c\in\mathbb{R}$ *tal que*

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|}\le c<1$$

para todo $x\in X$ *e todo* $n\in\mathbb{N}$ *suficientemente grande. Prove que* $\sum_n |f_n(x)|$ *e* $\sum_n f_n(x)$ *convergem uniformente em* X.

Exercício 4. *(2pt) Se uma sequência de funções contínuas* $f_n\colon X\to\mathbb{R}$ *converge uniformemente num conjunto denso* $D\subset X$, *prove que* f_n *converge uniformemente em* X.

Exercício 5. *(2pt) Seja* $\mathcal{F}$ *uma família de polinômios tal que:*

- *Existe* $k\in\mathbb{N}$ *tal cada polinômio* p *de* $\mathcal{F}$ *tem grau menor ou igual à* k.
- *Existe um* $a\in\mathbb{R}$ *e* $C_i\ge 0$ *tal que para todo* $i\le k$ *e* $p\in\mathcal{F}$ *nós temos*

$$|p^{(i)}(a)|\le C_i.$$

Mostre que a família $\mathcal{F}$ *é equicontínua e uniformemente limitada em qualquer parte compacta de* $\mathbb{R}$.

Exercício 6. *(2pt) Seja* $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função contínua, não negativa, que se anula fora de* $[-1,1]$ *e tal que*

$$\int_{-1}^{1}\phi(x)\,dx=1$$

Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função uniformemente contínua e limitada em* $\mathbb{R}$. *Mostre que a sequência de funções*

$$f_n(x):=\int_{-1}^{1} n\phi(ny)f(x-y)\,dy$$

converge uniformente para f *em* $\mathbb{R}$.

Bibliografia: As questões 1, 2, 3 e 4 são exercícios do livro Análise Real, Volume 1, por Elon Lages Lima (Coleção Matemática Universitária).

URL: `www.icmc.usp.br/~smania/sma308/`