PRIMEIRA PROVA DE ANÁLISE II

08.10.2007

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *(2pt) Dê as definições de*

A. *Integral superior e inferior de uma função limitada, função integrável e sua integral de Riemann em termos de suas integrais superior e inferior.*

B. *Integral de Riemann em termos de somas de Riemann.*

Exercício 2. *(2pt) Prove a desigualdade de Schwarz: se* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas então*

$$\Big[\int_a^b f(x)g(x)\, dx\Big]^2 \leq \int_a^b f(x)^2\, dx \int_a^b g(x)^2\, dx.$$

Exercício 3. *(2pt) Prove que para todo* $x \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n = e^x.$$

Exercício 4. *(2pt) Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrável tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in [a,b]$ *Mostre que*

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Exercício 5. *(2pt) Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que*

i. $f(0) = 1$,

ii. $f(x+y) = f(x)f(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Mostre que existe $a > 0$ *tal que* $f(x) = a^x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 6. *(2pt) Faça os seguintes itens:*

A. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que* f' *é integrável em* $[a,b]$ *e* $f'(x) = 0$ *exceto em um conjunto de medida nula. Mostre que* f *é constante.Sug: Teorema do Valor Médio para funções diferenciáveis, caracterização de funções integráveis e outras coisinhas a mais...*

B. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que* f' *é integrável em* $[a,b]$*. Mostre que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

para todo $x \in [a,b]$.

URL: `www.icmc.usp.br/~smania/sma308/`