PROVA SUBSTITUTIVA DE ALGEBRA LINEAR E EDO

DANIEL SMANIA

Questão 1. *(2pt) Encontre a solução geral do seguinte sistema homogêneo de equações diferenciais*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Questão 2. *(1pt) Considere a aplicação $T\colon V \to V$, definida no espaço vetorial V gerado pelas funções $\{e^t, te^t\}$ e definida por $T(f) = f'$. Calcule a matriz associada a T na base $\{e^t, te^t\}$ (no domínio e contradomínio).*

Questão 3. *(1.5pt) Encontre $T(a,b,c)$, onde $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear tal que*

$$T(1,1,1) = 3,\ T(0,1,-2) = 1 \text{ e } T(0,0,1) = -2.$$

Questão 4. *(1.5pt) A seguinte matriz A é diagonalizável? Caso seja, diagonalize-a (encontre uma matriz diagonal D e uma matriz inversível M tal que $A = MDM^{-1}$).*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Questão 5. *(2pt) Encontre a(s) solução(ões) do seguinte sistema*

$$\begin{array}{llll} x & +5y & +5z & = -3 \\ 2x & -3y & -2z & = 5 \\ & +1y & -3z & = 7 \end{array}$$

Questão 6. *(2pt) Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais*

- *a.* $x' - 2x = t^2 e^{2t}$.
- *b.* $x' = \frac{3t^2+4t+2}{2(x-1)}$.

Questão 7. *(1pt) Encontre a solucção geral da equação diferencial*

$$x'' + 5x' + 4x = 0$$

Questão 8. *(1pt) Seja $ax^2 + bx + c$ um polinômio de grau 2 com duas raízes distintas λ e θ. Considere a equação diferencial*

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

- *a. Mostre que*

  $$x_1(t) = e^{\lambda t} \text{ e } x_2(t) = e^{\theta t}$$

  são solucões da equação diferencial acima.
- *b. Mostre que estas duas soluções são linearmente independentes. Sabendo que o espaço de soluções tem dimensão dois, conclua que qualquer solução pode ser escrita da forma*

  $$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$$

  para algum c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

Questão 9. *(1pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear tal que $Im\ T^2 = Im\ T$. Mostre que $Ker\ T \cap Im\ T = \{0\}$.*