TERCEIRA PROVA DE ALGEBRA LINEAR E EDO

DANIEL SMANIA

Questão 1. *(2pt) Encontre a solução geral do sistema*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Questão 2. *(2pt) Encontre as soluções das seguintes equações diferenciais (se uma condição inicial não for dada, encontre a solução geral).*

- *a.* $x' + x \cos t = 0$,
- *b.* $x' + \frac{2}{t}x = 5t^2$,
- *c.* $x' + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(1-2t)x^4$,
- *d.* $x' = \sqrt{x}$, $x(1) = 0$,

Questão 3. *(2pt) Encontre a solução geral do seguintes sistemas:*

$$a.\ \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \qquad b.\ \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} = \begin{matrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

Questão 4. *(2pt) Encontre a solução do problema com valor inicial*

$$y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

Questão 5. *(1pt) Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ tal que para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ temos $(A-\lambda I)^k v = 0$. Mostre que*

$$e^{At}v = e^{\lambda t} \quad v + t(A-\lambda I)v + \frac{t}{2}(A-\lambda I)^2 v + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda I)^{k-1}v \quad .$$

Questão 6. *(1pt) Mostre que toda solução da equação $x' + ax = be^{-ct}$, onde a e c são constantes positivas e b é um número real qualquer, tende para zero quando t tende para infinito.*

Questão 7. *(1pt) Seja $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $x(0) = 1$ e $x(t+h) = x(t)x(h)$, para todo $x, h \in \mathbb{R}$. Mostre x satisfaz a equação diferencial $x'(t) = x'(0)x(t)$ (Sugestão: Use a definição de derivada $x'(t) = \lim_{h\to 0}(x(t+h) - x(t))/h$ e que $x(0) = 1$). Conclua que $x(t) = e^{ct}$, onde $c = x'(0)$.*

Questão 8. *(2pt) Encontre a solução geral do sistema linear não homogêneo.*

$$\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} = \begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} + \begin{matrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{matrix}$$