SEGUNDA PROVA DE ALGEBRA LINEAR E EDO

DANIEL SMANIA

Questão 1. *(2pt) Encontre uma base para o espaço das soluções do sistema*

$$\begin{array}{rrrrl} 1x & +3y & -3z & +0w & =0 \\ 3x & +9y & -10z & +5w & =0 \\ -2x & +0y & +5z & -1w & =0 \\ 1x & +1y & -3z & +2w & =0 \end{array}$$

Questão 2. *(2pt) As seguintes matrizes são diagonalizáveis? Justifique sua resposta.*

$$a. \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; b. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Questão 3. *(2pt) Ache todos os autovalores e encontre uma base para cada autoespaço do operador*

$$T(x,y,z) = (x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z)$$

Questão 4. *(2pt) Uma transformação linear $P\colon V \to V$ é chamada de projeção se $P^2(v) = P(v)$, para todo $v \in V$. Seja P uma projeção:*

(1) *Mostre que, para todo $v \in V$, nos temos que $v - P(v) \in Ker\ P$.*
(2) *Mostre que $Ker\ P \cap Im\ P = \{0\}$.*
(3) *Use os itens anteriores para mostrar que $V = Ker\ P \oplus Im\ P$.*
(4) *Mostre que os autovalores de uma projeção são ou zero ou um.*
(5) *Mostre que toda projeção é diagonalizável (Sugestão: mostre que $Pv = v$, para todo $v \in Im\ P$ e use isto para encontrar uma base que diagonaliza P).*

Questão 5. *(2pt) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por*

$$T(3,1) = (2,-4) \text{ e } T(1,1) = (0,2)$$

Por um teorema visto em aula, tal transformação linear existe e é única. Calcule $T(a,b)$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Questão 6. *(2pt) Seja $F\colon \mathcal{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por*

$$F(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$$

Encontre a matriz associada à transformação F usando a base $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$ e a base $B_2 = \{(1,3),(1,4)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 7. *(1pt) Seja $A\colon V \to V$ uma transformação linear. Seja $v \neq 0$ um vetor tal que Av, A^2v, $A^3v, \ldots, A^{k-1}v$ são não nulos, mas $A^kv = 0$ (note que isto implica que $A^jv = 0$, para todo $j \geq k$). Mostre que $v, Av, \ldots, A^{k-1}v$ são linearmente independentes*