PRIMEIRA PROVA DE ÁLGEBRA LINEAR E EDO-CDACOMP

DANIEL SMANIA

Questão 1. *(2pt) Os seguintes conjuntos de vetores são l.i ou l.d? Justifique sua resposta.*

a. $(2,3,4),\ (-10,-15,-20)$ *b.* e^{2x} *e* e^{3x}
c. x^4+x^3+x *e* x^2+x+1 *d.* $(1,2,3,4),\ (3,343,34,23),\ (6,5,32,2),\ (2,2,34,2),\ (2,9,32,2)$
e. $(1,2,-3),\ (1,-3,2),\ (2,-1,5)$

Questão 2. *(2pt) Seja V o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Considere*

$$P := \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ t.q. } f(-x)=f(x), \text{ para todo } x\in\mathbb{R}\}$$
$$I := \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ t.q. } f(-x)=-f(x), \text{ para todo } x\in\mathbb{R}\},$$

isto é, P é o conjunto das funções pares e I é o conjunto das funções ímpares.

(1) *(0.5pt) Mostre que P e I são subespaços vetoriais de V*
(2) *(0.5pt) Seja $f\in V$ uma função qualquer. Defina g e $h\in V$ como*
$$g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ e } h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$
Mostre que $g\in P$, $h\in I$ e $f=g+h$.
(3) *(0.5pt) Mostre que $P\cap I=\{0\}$*
(4) *(0.5pt)Conclua, usando os items anteriores, que $V=P\oplus I$.*

Questão 3. *(1pt) Sejam a_1,a_2,a_2,a_4 números reais NÃO nulos. Mostre que o conjunto*
$$\{(a_1,a_2,a_3,a_4),\ (a_1,a_2,a_3,0),\ (a_1,a_2,0,0),\ (a_1,0,0,0)\}$$
é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Questão 4. *(1pt) Considere o conjunto de funções*
$$W := \{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ t.q. } f(2)=f(3)\}$$
Mostre que W, munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação por um escalar, é um espaço vetorial.

Questão 5. *(2pt) Faça os seguintes itens:*

(1) *(1pt) Dê um exemplo de um espaço vetorial V e dois subespaços U e W de V tal que $U\cup W$ NÃO é um subestaço vetorial de V.*
(2) *(1pt) Dê um exemplo de um espaço vetorial V e dois subespaços U e W de V tal que $U\cap W$ NÃO é $\{0\}$.*

Questão 6. *(2pt) Sejam W e U subespaços vetoriais de V. Suponha que $\{w_1,w_2\}$ é uma base de W e que $\{u_1,u_2\}$ é uma base de U. Assuma que $W\cap U=\{0\}$. Mostre que $\{w_1,w_2,u_1,u_2\}$ é uma base para $W\oplus U$.*

Questão 7. *(1pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Mostre que, se W é um subespaço vetorial de V com dimensão n, então $W=V$.*

Questão 8. *(2pt) Seja $V=\mathbb{R}^3$. Mostre que W NÃO é um subespaço vetorial, onde*

(1) *(1pt) $W := \{(a,b,c)\colon a\geq 0$, isto é o conjunto dos vetores cuja primeira coordenada é não negativa.*
(2) *(1pt) $W := \{(a,b,c)\colon a^2+b^2+c^2\leq 1\}$, isto é, o conjunto dos vetores cuja norma não excede 1.*