LISTA HORRIVELMENTE CABELUDA DE ALGEBRA LINEAR E EDO

DANIEL SMANIA

Questão 1. *Escalone os seguintes sistemas de equações lineares são impossíveis, possíveis e determinados , ou possível e determinado. Dê o conjunto solução em todos os caso*

$$a.\ \begin{array}{llll} 2x & +3y & -4z & = 7 \\ x & -2y & -5z & = 3 \end{array} \qquad b.\ \begin{array}{llll} 1x & +2y & -3z & = 0 \\ 2x & +4y & -2z & = 2 \\ 3x & +6y & -4z & = 3 \end{array} \qquad c.\ \begin{array}{llll} 1x & +3y & -1z & = 2 \\ 0x & +11y & -5z & = 3 \\ 2x & -5y & +3z & = 1 \\ 4x & +1y & +1z & = 5 \end{array}$$

$$d.\ \begin{array}{lllll} 1x & +2y & -1z & +2w & = 1 \\ 2x & +4y & +1z & -2w & = 3 \\ 3x & +6y & +2z & -6w & = 5 \end{array}$$

Questão 2. *Para cada matriz abaixo, encontre todos os autovalores λ e autoespaços $V(\lambda)$.*

$$a.\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\ b.\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\ c.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d.\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Questão 3. *Encontre as inversas das seguintes matrizes:*

$$a.\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\ b.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}\ c.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 4. *Se $p(x) = \sum_0^n a_n x^n$ é um polinômia qualquer, e $T\colon V \to V$ é uma transformação linear, denote por $p(T)$ a tranformação linear de V em V definida por $p(T)(v) := \sum_0^n a_n T^n(v)$. Lembre que $T^2 := T \circ T$, $T^3 := T \circ T \circ T$, $\dots$. Mostre que , se $T(v) = \lambda v$, então $p(T)(v) = p(\lambda)v$.*

Questão 5. *Calcule A^3, onde A é a matriz:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questão 6. *Seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: existe k tal que $T^k = 0$. Mostre que $Id - T$ é uma transformação limear invers vel. Aqui Id é a identidade $Id\colon V \to V$, $Id(x) = x$. (Sugestão: verifique que a tranformação linear $Id + T + T^2 + \cdots + T^{k-1}$ é a inversa de $Id - T$)*

Questão 7. *Em uma primeira operação, coloca-se x gramas de areia em um balde A e y grams de areia no balde B, totalizando 1 quilo. Em um segundo passo, 30 por cento da areia no balde A é deslocada para o balde B e 60 por cento da areia do balde B é deslocada para o balde A. o restante da areia é mantida nas posições originais.*

(1) *Mostre que a quantidade de areia DEPOIS da segunda operação, em cada balde, c gramas no balde A e d gramas no balde B, é dada pela fórmula:*

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz 2×2.

(2) *Encontre os dois autovalores de A. Encontre os autoespaços associados a estes autovalores.*
(3) *Quais devem ser as quantidades x e y para que, após a segunda operação, as novas quantidades de areia em cada balde coincidam com as quantidades originais. Denote estas quantidades por k_A e k_B.*
(4) *Encotre matrizes 2×2 M e D tal que $A = MDM^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal.*
(5) *Sejam x e y quantidades quaisquer de areia que somam 1 kilo. Vamos agora repetir a segunda operação n vezes. Mostre que a quantidade de areia x_n no balde A e a quantidade de areia y_n depois destas operações é dada pela fórmula*
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = MD^nM^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
(6) *Sejam x e y quantidades quaisquer de areia nos balde A e B, somando 1 quilo. Mostre que, quando n cresce, x_n se aproxima de k_A e y_n se aproxima de k_B.*

Questão 8. *Verifique que as seguintes tranformações NÃO são lineares. Justifique.*
(1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x, y) = xy$.
(2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $f(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$.
(3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Questão 9. *Encontre uma tranformação linear $T \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, cuja imagem ImT é gerada pelos vetores $(1, 2, 0, 4)$ e $(2, 0, -1, -3)$.*

Questão 10. *Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Mostre que*
(1) *Se T é sobrejetiva então dim $W \leq$ dim V.*
(2) *Se T é injetiva então dim $Im\ T =$ dim V e portanto dim $W \geq$ dim V.*

Questão 11. *Encontre a matriz associada as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ com respeito a base canônica (no domínio e no contradomínio) e com respeito a base $\{(1, 3), (2, 5)\}$ no domínio e contradomínio.*
- $T(x, y) = (2y, 3x - y)$.
- $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$.

Questão 12. *SEja T o perador linear em $\mathbb{R}^e$ definido por*
$$t(x, y, z) = (2y - z, x - 4y, 3x)$$
- *Encontre a matriz A associada a T na base*
$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$
- *Mostre que $[Tv]_B = A[v]_B$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.*

Questão 13. *Seja A e B matrizes quadradas tais que $A = MBM^{-1}$, onde M é uma matriz quadrada inversível (ou seja, A e B são semelhantes). Mostre que λ é um autovalor de A se e somente se λ é um autovalor de B.*

Questão 14. *Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tranformação linear definida por*
$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$
Encontre uma base e a dimensão do
(1) *subespaço $Ker\ T$.*
(2) *subespaço $Im\ T$.*