PRIMEIRA LISTA CABELUDA

DANIEL SMANIA

Questão 1. *Verifique se os seguintes conjuntos de vetores so L.I. ou L.D.*

a) $(3,4)$ *e* $(1,-3)$

b) $(2,-3)$ *e* $(6,9)$

c) $(4,3,-2)$ *e* $(2,-6,7)$

d) $u = 2-5t+6t^2-t^3, v = 3+2t-4t^2+5t^3$

e) $(1,-2,1),\ (2,1,-1),\ (7,-4,1)$

f) $(2,-3,7),\ (0,0,0),\ (3,-1,-4)$

Questão 2. *Considere o conjunto das sequências infinitas*

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)\ t.q.\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Se $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ *e* $v = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)$*, defina a soma de duas sequências como*

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, \dots)$$

e, se $\lambda \in \mathbb{R}$*, defina*

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots).$$

Mostre que V*, munido desta soma e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial (verifique as 8 condições que definem um espaço vetorial).*

Questão 3. *Seja* V *como no exercício anterior. Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de* V*.*

- $V_1 = \{u = (x_1, x_2, \dots):\ \text{existe um } n \text{ t.q. } x_k = 0, \text{ para todo } k \geq n\}$.
- $V_2 = \{u = (x_1, x_2, \dots):\ 2x_n + 3x_{n+1} = 7x_{n+2}, \text{ para todo } n \geq 0\}$

Questão 4. *Seja* V *como nos dois exercícios anteriores. Seja* $p(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ *um polinômio com três (distintas) reais raízes,* θ_1*,* θ_2 *e* θ_3*. Seja* V_3 *o subespaços das sequências* $u = (x_1, x_2, \dots) \in V$ *tais que* $x_{n+3} = ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$*, para todo* $n \geq 0$*.*

(1) *Dados* $e, f, g \in \mathbb{R}$*, mostre que em* V_3 *existem uma única sequência* $u = (x_1, x_2, x_2, x_4, \dots) \in V_3$ *tal que* $x_1 = e$*,* $x_2 = f$ *e* $x_3 = g$*.*

(2) *Considere as sequências*

$$v_1 = (1, 0, 0, \dots),\ v_2 = (0, 1, 0, \dots) \text{ e } v_3 = (0, 0, 1, \dots)$$

Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é uma base de* V_3*.*

(3) *Considere as sequências*

$$u_1 = (1, \theta_1, \theta_1^2, \theta_1^3, \dots),\ u_2 = (1, \theta_2, \theta_2^2, \theta_2^3, \dots) \text{ e } u_3 = (1, \theta_3, \theta_3^2, \theta_3^3, \dots).$$

Mostre que $B = \{u_1, u_2, u_3\} \subset V_3$ *e é um conjunto l.i. (Sugestão: mostre a matrix, cujas primeira, segunda e terceira linhas são* $(1, \theta_1, \theta_1^2)$*,* $(1, \theta_2, \theta_2^2)$ *e* $(1, \theta_3, \theta_3^2)$ *tem determinante não nulo). Conclua, utilizando o item anterior, que* B *é uma base para* V_3*.*

(4) *Conclua que toda sequência* $u \in V_3$ *se escreve como*

$$u = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3, \alpha\theta_1^2 + \beta\theta_2^2 + \gamma\theta_3^2, \alpha\theta_1^3 + \beta\theta_2^3 + \gamma\theta_3^3, \ \dots),$$

para algum $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Questão 5. *Seja* V *o conjunto das funções diferenciáveis* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f'(x) = f(x), \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que V*, munido com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar para funções, é um espaço vetorial. Mostre que a funcção* e^x *pertence a* V.

Questão 6. *Expressar o vetor* X *dado como sendo uma combinação linear dos outros vetores dados.*

a) $X = (1,0);\ A = (1,1),\ B = (0,1)$ *b)* $X = (1,1);\ A = (2,1),\ B = (-1,0)$.
c) $X = (4,3);\ A = (2,1),\ B = (-1,0)$ *d)* $X = (1,1,1); A = (0,1,-1),\ B = (1,1,0),\ C = (1,0,2)$

Questão 7. *Considere os espaço vetorial de todas as funções reais de uma variável* x*. Mostrar que os sequintes pares de vetores são linearmente independentes*

(1) $1,\ x$.
(2) $xe^x,\ e^{2x}$.
(3) $cos(x),\ cos(3x)$.
(4) $x,\ x^2$.
(5) $x,\ sen(x)$.

Questão 8. *Suponha que o conjunto* $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ *gera o espaço vetorial* V*. Demonstre:*

- *Se* $w \in V$*, então* $\{w, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *é l.d. e gera* V.
- *Se* v_i *é combinação linear dos vetores em* $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}\}$*, então* S' *gera* V.

Questão 9. *Seja* W *um subespaço vetorial de uma espaço vetorial* V*. Fixe* $v \in V$ *e defina o conjunto* $W + v := \{u + v \ t.q.\ u \in V\}$*. Mostre que o conjunto* $W + v$ *é um subespaço vetorial de* V *se e somente se* v *pertence a* W .

Questão 10. *Seja* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*. Defina*

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \ t.q. \sum_1^n a_i x_i = 0\}$$

Mostre que W *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.

Questão 11. *Determine se os seguintes conjuntos de vetores formam uma base de* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $(1,1,1)$ *e* $(1,-1,5)$ *b)*$(1,2,3),\ (1,0,-1),$ *e* $(3,-1,0)$
c)$(1,1,2),\ (1,2,5)$ *e* $(5,3,4)$

Questão 12. *Seja* V *um espaço vetorial que é gerado pelos* n *vetores* $\{v_1, \dots, v_n\}$*. Suponha ainda que* V *admita um conjunto l.i. com* n *vetores* $\{w_1, \dots, w_n\}$*. Prove que dim* $V = n$.

Questão 13 (Métodos das frações parciais)**.** *Seja* $q_0(x) =$ *um polinômio de grau* n *com* n *raízes reais distintas,* $r_1, r_2, \ldots, r_n$. *O objetivo deste exercício é mostrar que toda função racional da forma* $p_0(x)/q_0(x)$ *onde o grau de* p_0 *é menor ou igual à* $n-1$ *pode ser escrita da forma*

$$\frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-r_n}$$

(1) *Considere os conjunto de funções racionais*

$$V = \{u(x) \text{ t.q. } u \text{ pode ser escrita da } forma\ u(x) = \frac{p(x)}{q_0(x)},\ \text{com grau } p \leq n-1\}$$

Mostre que V *é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais para funções.*

(2) *Mostre que o conjunto*

$$\{\frac{1}{q_0(x)}, \frac{x}{q_0(x)}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{q_0(x)}\}$$

gera V. *Conclua que* $dim V \leq n$.

(3) *Mostre que*

$$\frac{1}{x-r_i} \in V, \text{ para todo } i \leq n$$

(4) *Mostre que*

$$S = \{\frac{1}{x-r_1}, \frac{1}{x-r_2}, \cdots, \frac{1}{x-r_n}\}$$

é um conjunto linearmente independente de vetores de V. *(Sugestão: Use o seguinte fato: se dois polinômios* $a(x)$ *e* $b(x)$*, ambos de grau* $\leq k$*, coincidem em* $k+1$ *pontos da reta real, então* $a(x) = b(x)$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.*) Conclua que* S *é uma base para* V *(em particular dim* $V = n$*).*

(5) *Use o item anterior para concluir que toda funçào racional* $u \in V$ *se escreve como combinação linear de elementos de* S.