USP/ICMSC/SMA - 4.^{a} LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-300 - GEOMETRIA ANALÍTICA

Professora Roberta Godoi Wik Atique

1. Dadas as retas $r: \ X = (1,0,0) + \alpha(0,1,1)$, $s: \ X = (0,2,0) + \beta(1,0,1)$ e $t: \ X = (0,0,3) + \gamma(1,1,0)$, seja h a reta concorrente com r, s e t nos pontos A, B e C respectivamente, de modo tal que B seja o ponto médio de AC. Determine os pontos A, B e C e uma equação vetorial de h.

2. Dada a reta $r: x - y = x + z - 1 = 0$, seja π um plano que contém r e determina com os três planos coordenados um tetraedro de volume $V = 1/12$. Determine os vértices do tetraedro e uma equação geral de π.

3. Dados os pontos $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,3)$ e $O = (0,0,0)$, sejam r, s e t as retas que passam respectivamente por O e A, O e B, O e C. Obtenha uma equação geral do plano π, paralelo ao plano que passa por A, B e C, de modo que o triângulo $A'B'C'$ tenha área $7/8$, sendo A', B' e C' os pontos onde as retas r, s e t furam π.

4. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que se apoiam na reta $r: X = (1,0,2) + \lambda(2,-1,4)$ e no plano $\pi: x - 2y - z = 1$, e interprete geometricamente.

5. Ache equações paramétricas da reta s, simétrica da reta r em relação ao plano π, sendo r determinada por $A = (1,0,0)$ e $B = (0,-1,-1)$ e π dado por $x + y - z = 3$.

6. Achar a distância entre os planos paralelos $2x - y + 8z = 6$ e $2x - y + 8z + 10 = 0$.

7. Achar as equações paramétricas da reta que passa por $(0,-1,5)$ e é perpendicular ao plano $3x - y + 9z = 6$.

8. a) Encontrar a equação da reta r que passa por $A = (0,1,-1)$ e é paralela a reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

   b) Encontrar a equação do plano que passa por $P = (1,0,-1)$ e é perpendicular à reta r acima.

   c) Encontrar o ponto simétrico de $P = (1,0,-1)$ em relação à reta r do ítem a).

9. Seja d a distância entre os pontos $A = (1,3,4)$ e $B = (2,1,2)$. Seja P o ponto de coordenadas (d, d^2, d^3). Calcular a distância do ponto P ao plano π, dado pela equação $x - y + z - 18 = 0$.

10. Em relação a um sistema de coordenadas $S = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ um plano π tem equação $2x - 3y + 4 = 0$. Considerar o sistema de coordenadas $S' = \{0', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ dado por $0' - 0 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = 3\vec{e}_1 \end{cases}$$

    Em relação a S', uma reta r é dada por

$$\begin{cases} x' = 2 + \lambda \\ y' = 0 \\ z' = 3\lambda \end{cases}$$

    Determinar as coordenadas do ponto P, intersecção de r com π em relação ao sistema S'.

11. Determine os valores de a para que a reta $\begin{cases} x + y + z + a = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ intercepte a reta $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x = z - 1 \end{cases}$

12. Achar as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P = (-2, 4, -6)$, cujo vetor diretor $\vec{u}$ é ortogonal ao vetor $\vec{v} = (3, -1, -3)$ e é concorrente com a reta

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = -5\lambda + 3 \end{cases}$$

13. Determinar a equação vetorial da reta r perpendicular comum às retas reversas

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = -3t + 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -\lambda + 2 \\ y = 4\lambda - 1 \\ z = \lambda + 3 \end{cases}$$

14. Escrever a equação do plano que contém a reta $r : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$ e forma com o plano $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ um ângulo de 60^o.

15. Calcular a distância do ponto $P = (2, 2, 2)$ ao plano $X = (0, -1, 2) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(2, -1, 0)$

16. Determinar o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos dois planos:

$$\pi_1 : x - y - z = 0 \qquad \pi_2 : x + y + z - 1 = 0$$

17. Achar o ângulo que a reta $r : x = y = z$ faz com o plano $2x - y - 2z - 1 = 0$.

18. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $A = (1, 2, 1)$ e encontra a reta $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ sob ângulo de 60^o.

19. Dê uma equação vetorial da reta r, contida no plano $\pi : x - y = 0$, que forma um ângulo de 30^o com o plano $\alpha : y - z = 1$ e dista 1 do eixo dos x.

20. Ache um vetor diretor diretor de uma reta paralela a o plano $\pi : x + y + z = 0$ e que forma 45 graus com o plano $\pi_1 : x - y = 0$

21. Projete o ponto $P = (1, 4, 0)$ sobre o plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, paralelamente a reta $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$.

22. Ache uma equação geral do plano por $(2, 1, 0)$ que é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

23. Ache os pontos de $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que equidistam dos pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$. Interprete geometricamente o resultado.

24. Determine o ponto de $\pi : 2x - y + z - 2 = 0$ tal que a soma de suas distâncias a $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, -1, -1)$ seja mínima.

25. Um quadrado $ABCD$ tem a diagonal BD contida na reta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sabendo que $A = (0, 0, 0)$, determine os vértices B, C e D.

26. Dados os pontos $A = (-2, 0, 1)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (-2, -1, -2)$ e $E = (1, 2, 2)$, mostre que eles sao vértices de uma pirâmide de base quadrangular, convexa e calcule o volume dessa pirâmide.