USP/ICMC/SMA - 5.^{a} LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-332 - CÁLCULO II.

Professora Roberta Godoi Wik Atique.

1. Seja $z = x\, e^{x^2-y^2}$.

   a) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

2. Calcule $\nabla f(x,\, y)$ sendo f dada por:

   a) x^2y^3 b) $e^{\cos(\ln\sqrt{x^2+y^3})}$ c) $\text{arctg}(\arccos\sqrt[6]{e^x + \text{sen}(y+x)}\,)$

3. Calcule $\nabla f(x,\, y,\, z)$, para $f(x,\, y,\, z) = \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$.

4. Seja $f(x,\, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0,\, y_0)$, sendo $(x_0,\, y_0)$ dado por

   a) $(1,\, 1)$ b) $(-1,\, 1)$ c) $(-1,\, -1)$ d) $(1,\, -1)$

5. Seja $f(x,\, y) = \text{arctg}\dfrac{x}{y}$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0,\, y_0)$, sendo $(x_0,\, y_0)$ um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

6. Seja $f(x,\, y) = x^2 + y^2$ e $\gamma(t) = (x(t),\, y(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x,\, y) = 1$. Seja $\gamma(t_0) = (x_0,\, y_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0,\, y_0) = 0$. Interprete geometricamente.

7. Considere a função $f(x,\, y,\, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0,\, y_0,\, z_0)$.

   a) Prove que $\nabla f(x_0,\, y_0,\, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

   b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto $(x_0,\, y_0,\, z_0)$.

   c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1,\, 1,\, 1)$.

8. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$:

   a) $z = \text{sen}\, xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$

   b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \text{sen}\, t$ e $y = \cos t$.

   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \text{sen}\, 3t$ e $y = \cos 3t$

9. Seja $g(t) = f(3t,\, 2t^2 - 1)$. Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f. Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\, -1) = \dfrac{1}{3}$.

10. Expresse $\dfrac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $z = f(x,\, y)$ e:

    a) $x = t^2$ e $y = 3t$;

    b) $x = \text{sen}\, 3t$ e $y = \cos 3t$.

11. Suponha que, para todo t, $f(t^2,\, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,\, 2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,\, 2)$.

12. Suponha que, para todo x, $f(3x,\, x^3) = \operatorname{arctg} x$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,\, 1)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,\, 1) = 2$. Depois, determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,\, 1,\, f(3,\, 1))$.

13. a) Admita que, para todo $(x,\, y)$, $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = 2$. Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2\cos t,\, \operatorname{sen} t)$.

    b) Admita que, para todo $(x,\, y)$, $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = 0$. Prove que f é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

    c) Admita que, para todo $(x,\, y)$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = 0$. Mostre que $g(t) = f\left(t,\, \dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$, é constante.

14. Sejam $f(x,\, y,\, z)$ e $g(x,\, y)$ funções diferenciáveis tais que, para todo $(x,\, y)$ no domínio de g, $f(x,\, y,\, g(x,\, y)) = 0$. Suponha que $g(1,\, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,\, 1,\, 3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,\, 1,\, 3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,\, 1,\, 3) = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,\, 1,\, 3)$.