USP/ICMC/SMA - 4.ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-332 - CÁLCULO II.

Professora Roberta Godoi Wik Atique.

1. Em cada um dos itens abaixo, encontre o maior subconjunto R de tal modo que a função f seja contínua nesse conjunto. Além disso, faça um desenho da tal região.

$a)\ f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad b)\ f(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2}$ $\quad c)\ f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{xyz}}{x+y+z}$

$d)\ f(x,y) = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ $\quad e)\ f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se} \quad x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

$f)\ f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$ $\quad g)\ f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

$h)\ f(x,y) = \dfrac{e^{1/-x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ $\quad i)\ f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

2. Encontre as derivadas parciais indicadas.

$a)\ f(x,y) = 4y^3 + \sqrt{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\quad b)\ f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$c)\ f(x,y,z) = 4xyz - ln(2xyz),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ $\quad d)\ f(r,\theta) = r\operatorname{tg}\theta - r^2 \operatorname{sen}\theta,\ f_r(\sqrt{2}, \pi/4),\ f_\theta$

$e)\ f(x,y,z) = e^{xy^2} + ln(y+x),\ f_x(3,0,17),\ f_y,\ f_z$ $\quad f)\ f(x,y) = \displaystyle\int_x^y ln(\operatorname{sen} t)\, dt,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$g)\ w = f(u,v),\ u = r\cos\theta,\ v = r\operatorname{sen}\theta,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}$ $\quad h)\ f(x,y,z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma,\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$

3. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$;

(b) Calcule $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$;

(c) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ caso existam;

(d) Mostre que f_x e f_y são contínuas em $\mathbb{R}^2$;

(e) Calcule $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$;

(f) Verifique que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Há contradição disto com a teoria? Justifique sua resposta.

4. Verifique se a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

5. Encontre a inclinação da reta tangente à curva intersecção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $(1, \sqrt{12}, 3)$.

6. Encontre a inclinação da reta tangente à curva intersecção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$ no ponto $(2, 1, 5)$.

7. A temperatura T em qualquer ponto de uma placa plana é dada por $t(x, y) = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Ache a taxa de variação da temperatura na placa nas direções dos eixos positivos dos x's e dos y's no ponto $(3, 1)$.

8. Determine uma equação do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto P indicado, nos seguintes casos:

   $a)\ z = (x^2 + y^2)^2,\ P = (1, 2, 25)$ $\qquad$ $b)\ z = 4xy,\ P = (4, 1/4, 4)$

   $c)\ z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 3(x + y),\ P = (0, 0, 0)$ $\qquad$ $d)\ z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ P = (4, 4, \pi/4)$

9. Em quais pontos do hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$?

10. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ passam pela origem.

11. Determine o plano que é paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

12. O ângulo entre duas superfícies num ponto P comum é o menor ângulo entre as normais a essas superfícies nesse ponto. Determine o ângulo entre os gráficos das funções $f(x, y) = e^{xy} - 1$ e $g(x, y) = ln\sqrt{x^2 + y^2}$ em $P = (0, 1, 0)$.

13. Dizemos que duas superfícies S_1 e S_2 são tangentes em um ponto P pertencente a ambas se o plano tangente a S_1 coincidir com o plano tangente a S_2 em P. Mostre que o cone $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ e a esfera $x^2 + y^2 + (z - \dfrac{b^2 + c^2}{c}) = \dfrac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ são tangentes nos pontos $(0, b, c)$ e $(0, -b, c)$.

14. Encontre os pontos do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 1$ nos quais a reta normal a esta superfície coincide com a reta que liga estes pontos à origem.