USP/ICMC/SMA - 1.ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-332 - CÁLCULO II.

Professora Roberta Godoi Wik Atique.

1. Trace a curva C determinada por $r(t)$ em cada um dos itens abaixo:

$a)\, r(t) = (3t, 1 - 9t^2),\ t \in \mathbb{R}$ $\quad b)\, r(t) = (1 - t^2, t),\ t \in \mathbb{R}$
$c)\, r(t) = (2 + \cos t, -3 + \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ $\quad d)\, r(t) = (t, -3\operatorname{sen} t, 3\cos t),\ t \geq 0$
$e)\, r(t) = (t, 4\cos t, 9\operatorname{sen} t),\ t \geq 0$ $\quad f)\, r(t) = (\operatorname{tg} t, \sec t, 2),\ |t| \leq \pi/2$

2. Ache o comprimento da curva C, determinada por $r(t)$, em cada um dos itens abaixo:

$a)\, r(t) = (5t, 4t^2, 3t^2),\ 0 \leq t \leq 2$ $\quad b)\, r(t) = (t^2, t\operatorname{sen} t, t\cos t),\ 0 \leq t \leq 1$
$c)\, r(t) = (2t, 4\operatorname{sen} 3t, 4\cos 3t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ $\quad d)\, r(t) = (1 - t^2, 4t, 3 + 2t^2),\ 0 \leq t \leq 2$
$e)\, r(t) = (e^t, t\operatorname{sen} t, t\cos t),\ 0 \leq t \leq 1$ $\quad f)\, r(t) = (3t^2, t^3, 6t),\ 0 \leq t \leq 1$

3. Uma *concha-espiral* é uma curva C que admite uma parametrização do tipo $x = ae^{wt}\cos t$, $y = ae^{wt}\operatorname{sen} t$, $z = be^{wt}$, $t \geq 0$, onde a, b, w são constantes fixadas.
(a) Mostre que C está contida no cone $a^2z^2 = b^2(x^2 + y^2)$.
(b) Trace o gráfico de C para $a = b = 4$ e $w = -1$.
(c) Ache o comprimento de C correspondente ao intervalo $t \geq 0$

4. Considere a curva parametrizada C dada por $x = a\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\alpha$, $y = b\operatorname{sen} t\cos\alpha$, $z = c\cos t$, $t \geq 0$, onde a, b, c e α são constantes fixadas.
(a) Mostre que C está contida no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
(b) Mostre que C também está num plano que contém o eixo-z.
(c) Faça um esboço do gráfico da curva C.

5. Para cada um dos itens abaixo, encontre:
(i) o domínio de $r(t)$.
(ii) $r'(t)$ e $r''(t)$.

$a)\, r(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{2-t})$ $\quad b)\, r(t) = (\frac{1}{t}, \operatorname{sen} 3t)$ $\quad c)\, r(t) = (t^2, \operatorname{tg} t, 3)$
$d)\, r(t) = (\sqrt{t}, e^{2t}, t)$ $\quad e)\, r(t) = (ln(1-t), \operatorname{sen} t, t^2)$ $\quad f)\, r(t) = (e^{t^2}, \operatorname{arcsen} t)$

6. Encontre as equações paramétricas da reta tangente a C em P, nos seguintes casos:

$a)\, C : r(t) = (2t^3 - 1, -5t^2 + 3, 8t + 2),\ P = (1, -2, 10)$ $\quad b)\, C : r(t) = (e^t, te^t, t^2 + 4),\ P = (1, 0, 4)$
$c)\, C : r(t) = (e^t, t\operatorname{sen} t, t\cos t),\ P = (1, 0, 0)$ $\quad f)\, C : r(t) = (3t^2, t^3, 6t),\ P = (3, 1, 6)$

7. Uma *hélice* é uma curva cuja tangente faz ângulo constante com um vetor unitário $\vec{u}$. Mostre que a curva $C : r(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma hélice, determinando um vetor apropriado $\vec{u}$.

8. Um ponto move-se sobre uma curva C de modo que o vetor posição $r(t)$ e o vetor tangente $r'(t)$ sejam ortogonais. Mostre que C está sobre uma esfera de centro na origem. (sugestão: mostre que $||r(t)||^2 =$ constante, para todo t.)

9. Se uma curva C tem vetor tangente $\vec{u}$ em um ponto $P \in C$, então o *plano normal* a C em P é o plano que passa por P normal ao vetor $\vec{u}$. Encontre a equação do plano normal à curva C no ponto P nos seguintes casos:

$a)\, C : r(t) = (e^t, te^t, t^2 + 4),\ P = (1, 0, 4)$ $\quad b)\, C : r(t) = (t\operatorname{sen} t, t\cos t, t),\ P = (\pi/2, 0, \pi/2)$
$c)\, C : r(t) = (e^t, t\operatorname{sen} t, t\cos t),\ P = (1, 0, 0)$