USP/ICMSC/SMA - 11.^{a} LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-332 - CÁLCULO II.

Professora Roberta Godoi Wik Atique.

OBS.: Nos exercícios sobre integrais de linha, considere sempre a orientação anti-horária caso não seja especificado o contrário.

1. Calcule as seguintes integrais de superfície:

   a) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, onde S é a esfera de centro na origem e raio a. Resp. $\frac{8}{3}\pi a^4$.

   b) $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, onde S é a superfície lateral do cone

   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0, \quad 0\le z\le b. \qquad \text{Resp. } \frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}.$$

   c) $\displaystyle\iint_S \sqrt{1+y^2}\,dS$, onde S é dada por $z=y^2/2$, $0\le x\le 1$ e $0\le y\le 1$. Resp. 4/3.

2. Calcule $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)\,dS$, sendo

   a) $f(x,y,z)=x$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v)=(u,v,u^2+v)$, $0\le u\le 1$ e $u^2\le v\le 1$. Resp. $\frac{\sqrt{2}}{10}(3\sqrt{3}-2)$.

   b) $f(x,y,z)=xy$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v)=(u-v,u+v,2u+v+1)$, $0\le u\le 1$ e $0\le v\le u$.Resp. $\sqrt{146}$.

   c) $f(x,y,z)=y$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v)=(u,v,1-u^2)$, $0\le u\le 1$ e $0\le v\le \sqrt{u}$.Resp. $\frac{1}{24}(5\sqrt{5}-1)$.

3. Aplicando o teorema de Stokes, achar as integrais abaixo.

   a) $\displaystyle\int_\gamma (y+z)\,dx \ + \ (z+x)\,dy \ + \ (x+y)\,dz$, onde γ é a circunferência

   $$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0. \qquad \text{Resp. } 0.$$

   b) $\displaystyle\int_\gamma (y-z)\,dx \ + \ (z-x)\,dy \ + \ (x-y)\,dz$, onde γ é a elipse

   $$x^2+y^2=1, \quad x+z=0. \qquad \text{Resp. } 4\pi.$$

   c) $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx \ + \ z^2\,dy \ + \ x^2\,dz$, onde γ é o triângulo de vértices $(a,0,0),(0,a,0)$ e $(0,0,a)$, $a>0$. Resp. $-a^3$.

4. Comprove o teorema de Stokes nos casos em que o campo $F(x,y,z)$ e a superfície S são dados por:

   a) $F(x,y,z)=(x,y,z)$ e S é a parte superior da esfera unitária centrada na origem.

   b) $F(x,y,z)=(3z,4x,2y)$ e S é a porção do parabolóide $z=10-x^2-y^2$ compreendida entre os planos $z=1$ e $z=9$.

   c) $F(x,y,z)=(x^4,xy,z^4)$ e S é o triângulo de vértices $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,2)$. Resp. 4/3.

5. Usando o teorema de Gauss, calcule o fluxo dos campos abaixo através das respectivas superfícies:

a) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ e S é a face do cubo $[0,a] \times [0,a] \times [0,a]$. Resp. $3a^4$.

b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e S é a face da pirâmide limitada pelos planos $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$ e $z=0$. Resp. $a^3/2$.

c) $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$. Resp. $\frac{12}{5}\pi a^5$.

d) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ e S é o cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \le z \le b. \qquad \text{Resp. } \frac{\pi a^2 b^2}{2}.$$

6. Usando o teorema de Green, calcule:

a) $\int_\gamma 2x^2y\,dx \;+\; (x+y)\,dy$ onde γ é dada por $y = 2x$, $y^2 = 4x$ e $0 \le x \le 1$. Resp. $4/21$.

b) $\int_\gamma (3x^2+y)\,dx \;+\; (2x-y)\,dy$ onde γ é dada por $y = x$, $y^2 = x^3$, e $0 \le x \le 1$. Resp. $1/10$.

c) $\int_\gamma (x+y)\,dx \;+\; (x-2y)\,dy$ onde γ é dada por $y = x$, $y = 0$, e $x = 2$.

d) $\int_\gamma (e^x \operatorname{sen} y - y)\,dx \;+\; e^x \cos y\,dy$ onde γ é dada por $y = x$, $y = 3$, e $x = 0$. Resp. $9/2$.

7. Verifique se os seguintes campos são conservativos:

a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

b) $F(x,y) = (2xy, x^2)$.

c) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

d) $F(x,y) = (x+y, x-y)$.

e) $F(x,y) = (x+y, y-x)$.

8. Seja $f : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que a área do gráfico de f é

$$\iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

9. Calcule a área do parabolóide hiperbólico $z = xy$ que fica dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Resp. $\frac{2}{3}\pi[2\sqrt{2} - 1]$.