Cálculo II

Lista 01: Curvas Parametrizadas

Professor: Paulo Leandro Dattori da Silva

Bolsista PAE: Ana Paula Tremura Galves

1. Considere as curvas γ cujas equações paramétricas são dadas por:
   (a) $x = -1 + t$, $y = 2 - t$, $I = \mathbb{R}$.
   (b) $x = \ln(t)$, $y = \sqrt{t}$, $t \geq 1$.
   (c) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $I = \mathbb{R}$.
   (d) $x = 5cos(3t)$, $y = 2sen(3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   (e) $x = 1 + t$, $y = 2 + 5t$, $z = -1 + 6t$, $I = \mathbb{R}$.
   (f) $x = sen(t)$, $y = t$, $z = cos(t)$, $t \geq 0$.

   Elimine o parâmetro t para encontrar a equação cartesiana da curva, esboce o traço da curva γ e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

2. Descreva a curva γ definida pela função vetorial
$$\overrightarrow{r}(t) = cos(t)\overrightarrow{i} + sen(t)\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ t \in [0, 2\pi].$$

3. Determinar a função vetorial que define a curva γ obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

4. Calcule os limites:
   (a) $\lim\limits_{t \to 1} \left[\left(\dfrac{3}{t^2}\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{\ln(t)}{t^2 - 1}\right)\overrightarrow{j} + sen(2t)\overrightarrow{k} \right]$.
   (b) $\lim\limits_{t \to 1} \left[\left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}\right)\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{t - 1}{t}\right)\overrightarrow{k} \right]$.

5. Calcule $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}(t)$ e $\dfrac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}(t)\right]$, onde:
   (a) $\overrightarrow{r}(t) = 3t^2\overrightarrow{i} + e^{-t}\overrightarrow{j} + \ln(t^2 + 1)\overrightarrow{k}$.
   (b) $\overrightarrow{r}(t) = \sqrt[3]{t^2}\overrightarrow{i} + cos(t^2)\overrightarrow{j} + 3t\overrightarrow{k}$.

6. Calcule as integrais:
   (a) $\displaystyle\int_1^4 \left[\sqrt{t}\overrightarrow{i} + te^{-t}\overrightarrow{j} + \frac{1}{t^2}\overrightarrow{k}\right]dt.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[cos(2t)\overrightarrow{i} + sen(2t)\overrightarrow{j} + tsen(t)\overrightarrow{k}\right]dt.$

7. Calcule o comprimento da curva definida pela função vetorial:
   (a) $\overrightarrow{r}(t) = t^2\overrightarrow{i} + (sen(t) - tcos(t))\overrightarrow{j} + (cos(t) + tsen(t))\overrightarrow{k}$, $0 \leq t \leq \pi$.
   (b) $\overrightarrow{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\overrightarrow{i} + e^t\overrightarrow{j} + e^{-t}\overrightarrow{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

8. Desenhe o traço da curva $\gamma : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (2cos(t), 2sen(t), t)$ e encontre sua função comprimento de arco com $t_0 = 0$.

9. Uma partícula se move a partir de uma posição inicial $\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ com velocidade inicial $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{i}$. Sua aceleração é dada por $\overrightarrow{a}(t) = 2\overrightarrow{i} + $ $+6t\overrightarrow{j} + 12t^2\overrightarrow{k}$. Determine sua velocidade e posição no instante t.

10. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 500 m/s e ângulo de elevação de 30°. Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade ($\approx 9,8\ m/s^2$), determine:
   (a) o alcance do projétil,
   (b) a altura máxima atingida e
   (c) a velocidade escalar do impacto.