ICMC - USP São Carlos
Prof. Raimundo

Terceira Lista de Cálculo 2

Tópicos abordados na unidade:

Integral Tripla: Teorema de Fubini; mudança de variáveis: linear, cilíndricas e esféricas; Integrais de linha (no plano e no espaço): de função e campo vetorial; campo gradiente e função potencial; construção da função potencial dado o campo gradiente; Teorema de Green e aplicações; Superfícies parametrizadas regulares e plano tangente; Superfícies de revolução; área de superfície; integral de superfícies de função e campo vetorial; parametrização de superfícies com bordo; mudança de coordenadas na parametrização; rotacional de um campo vetorial; Teorema de Stokes e aplicações; divergência de um campo vetorial, Teorema de Gauss/Ostrogradsky e aplicações.

Observação: Os exercícios abaixo não cobrem os tópicos acima em sua totalidade. Recomendamos que o aluno tente resolver mais exercícios da lista bibliográfica adotada no início do curso.

1) Calcule $\displaystyle\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, para:

a) $f(x, y, z) = 1$ e V é o sólido limitado pelas superfícies de equações $z+x^2 = 9$, $y+z = 4$, $y = 0$ e $y = 4$. Resp: $\dfrac{8}{15}(243 - 25\sqrt{5})$.
b) $f(x, y, z) = 1$ e V é o sólido limitado pelas superfícies de equações $z = x^2 + 3y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$. Resp: $8\pi\sqrt{2}$.
c) $f(x, y, z) = 1$ e V é o tetraedro com vértices em $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Resp: $\dfrac{1}{6}$.
d) $f(x, y, z) = 1$ e V é o sólido limitado pela superfície $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$. Resp: 8π.
e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e V é o sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Resp: $\frac{\pi}{8}(1 - \frac{\sqrt{2}}{8})$.
f) $f(x, y, z) = x$ e V é o sólido no primeiro octante limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e a superfície $z = x^2 + y^2$. Resp: $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}$.
g) $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Resp: $\frac{4}{3}\pi(e - 1)$.

2) Calcule $\displaystyle\int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, para o campo $F = (F_1, F_2, F_3)$ nos seguintes casos:
1) $F = (x^2, xy, 1)$ e $C(t) = (t, t^2, 1)$, para $0 \leq t \leq 1$. Resp: $\frac{11}{15}$;
2) $F = (\cos(z), \exp(x), \exp(y))$ e $C(t) = (1, t, \exp(t))$, para $0 \leq t \leq 2$. Resp: $2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$;
3) $F = (\sin(z), \cos(z), (xy)^{\frac{1}{3}})$ e $C(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), t)$, para $0 \leq t \leq \frac{7\pi}{2}$. Resp: $-\frac{1}{2}$;
4) $F = (x^3, y, z)$ e $C(t) = (0, r\cos(t), r\sin(t))$, para algum $r > 0$ real e $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp: 0;

3) Seja C é uma curva de classe C^k, para $k \geq 1$. Mostre que:

a) Se o campo F for perpendicular ao vetor velocidade $C'(t)$ em $C(t)$, então $\displaystyle\int_C F.ds = 0$.

b) Se o campo F for paralelo ao vetor velocidade $C'(t)$ em $C(t)$; ou seja, $F(C(t)) = \lambda(t)C'(t)$, $\lambda(t) > 0$, então $\int_C F.ds = \int_C \|F\| ds$.

c) Se o caminho $C(t)$ tem comprimento l e $\|F\| \leq M$ então $\left| \int_C F.ds \right| \leq M.l$.

d) Mostre que $\int_C \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx = 2\pi$, onde C é o circunferência com centro na origem e raio unitário. Conclua dai que o campo acima não é conservativo.

4) Verifique se cada aplicação é uma parametrização de uma superfície, encontre os pontos em que a parametrização é regular e o plano tangente (se existir) no ponto pedido:
a) $\alpha(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u)$(cone), $0 \leq v \leq 2\pi$ e $u \geq 0$. O plano tangente em $\alpha(0,0)$.
b) $\alpha(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u^2+v^2$, $0 \leq v \leq 2\pi$ e $u \geq 0$. O plano tangente em $\alpha(1,0)$.
c) $\alpha(u,v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), \sinh(u)$, $0 \leq v < 2\pi$ e $u \in \mathbb{R}$. O plano tangente em $\alpha(0,\pi)$.
d) $\alpha(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$(helicóide), $0 \leq v \leq 2\pi$ e $0 \leq u \leq 1$. O plano tangente em $\alpha(0, \frac{1}{2})$.

5) Na superfície parametrizada S com parametrização dada pela aplicação ϕ, encontre a área da região $\phi(D) \subset S$ nos seguintes casos:
a) $D = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ e $\phi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u)$. Resp: $\sqrt{2}\pi$.
b) $D = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ e $\phi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$. Resp: $\pi(\sqrt{2} - log(1+\sqrt{2}))$.

6) Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável num intervalo $[a,b]$, com $f(x) > 0$. Considere a superfície de revolução dada por:

a) girando o gráfico de f em torno do eixo Ox. Mostre que a área $A(S)$ da superfície é dada por $A(S) = 2\pi \int_a^b (f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2})dx$. Além disso, mostre que $A(S) = 2\pi \int_C f(x)ds$, onde é o caminho $C(x) = (x, f(x))$, $x \in [a,b]$.

b) girando o gráfico de f em torno do eixo Oy. Mostre que a área $A(S)$ da superfície é dada por $A(S) = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$.

7) a) Encontre a área da esfera com centro na origem e raio unitário $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, em que S^2 é representada parametricamente por $\alpha(\theta,\phi) = (\cos(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\phi))$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Resp: 4π
7) b) Mais geralmente, encontre a área da esfera com centro na origem e raio $R > 0$.

8) Considere a superfície T com parametrização dada por $\phi(u,v) = ((R+\cos(u))\cos(v), (R+\cos(u))\sin(v), \sin(u))$, $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ e $R > 1$ é um número real fixo. Mostre que a área $A(T) = (2\pi)^2 R$.(A superfície T é chamado de *toro* .)

9) Represente parametricamente a superfície S do elipsóide representado pela equação implícita (ou superfície de nível) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, e encontre a integral de área da superfície $A(S)$.

10) Encontre o volume V interior a esfera de equação $x^2+y^2+z^2 = 2$ e exterior ao cilíndro $x^2+y^2 = 1$. Encontre a área $A(V)$.

11) Seja C uma curva fechada simple que é bordo de uma região para o qual pode ser aplicada o Teorema de Green. Mostre que a área A da região D, que tem como bordo a

curva C é dada por $A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$.

12) Aplicando o exercício acima, encontre a área da região limitada pela curva hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, para $a > 0$ real.
(Dica: Observe que $x = a\cos^3(\theta), y = a\sin^3(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é uma parametrização da curva.) Resp: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

12.1) Mostre que se α e ϕ são superfícies equivalentes, então:

a) $N_\alpha = (+/-)N_\phi$;
b) A integral de superfície de uma função(resp. de um campo vetorial), com respeito a parametrização α é, em módulo, igual a integral de superfície de uma função (resp. de um campo vetorial) com respeito a parametrização ϕ.

Aplicação do Teorema de Stokes

13) Para o campo $F(x, y, z) = (y\exp(z), x\exp(z), xy\exp(z))$, encontre $\int_C F.ds$, onde C é uma curva que é o bordo de uma superfície S. Resp: 0.
13.1) O que você pode falar do campo acima ? Ou seja, o campo acima é conservativo ? Se sim, encontre a função potencial.
14) Encontre $\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz$, onde C é a curva intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 1$. Resp: $\frac{3}{2}\pi$.
14.1) Tente encontrar a integral acima, resolvendo a integral de linha diretamente.
14.2) Resolva mais exercícios sobre o T. de Stokes.

Aplicação do Teorema de Gauss

15) Para $F = (2x, y^2, z^2)$ e S a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, encontre $\iint_S \langle F, N\rangle ds$, onde N é o vetor normal de S apontando para fora. Resp: $\frac{8}{3}\pi$.

16) Calcule $\iint_S \langle F, N\rangle ds$, onde S é a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\langle F, N\rangle = x^2 + y + z$ N é o vetor normal de S apontando para fora. Resp: $\frac{4}{3}\pi$.

17) Encontre $\iint_S \langle F, N\rangle ds$ onde $F = (xy^2, x^2y, y)$ e S é a união do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com $-1 \leq z \leq 1$, e os planos $z = 1$ e $z = -1$ com $x^2 + y^2 \leq 1$. Resp: π.

18) Encontre o fluxo do campo $F(x, y, z) = (\exp(y) + \cos(yz), -2zy + \sin(xz), z^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2})$ através da superfície S, orientada positivamente, dada pela união das superfícies S_1 e S_2, onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$, e S_2 te equação $z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$. Resp: 6π.

19) Uma função é dita harmônica se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que, se f for de classe $C^k, k \geq 2$, e harmônica e S for uma superfície fechada(compacta e sem bordo), então $\iint_S \langle \nabla f, N\rangle ds = 0$.

20) Resolva mais exercícios sobre o T. de Gauss.