ICMC - USP São Carlos
Prof. Raimundo

Cálculo 2 - Lista 1(Revisão da Teoria)

1) Sejam x, y e z vetores no $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|z-y\|$.

2) Mais geralmente, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vetores no $\mathbb{R}^3$. Mostre que:
$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|$.

3) Sejam x e y vetores no R^n. Mostre a desigualdade de Cauchy-Schwarz:
$\| \langle x, y \rangle \| \leq \|x\|.\|y\|$. E vale a igualdade, se e somente se, existe um λ real tal que $x = \lambda y$; ou seja, x e y são vetores paralelos.

4) Considere x, y vetores no $\mathbb{R}^3$. Mostre que: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

5) Dados x, y vetores no $\mathbb{R}^3$, mostre que: $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\theta)$, para $0 \leq \theta \leq \pi$. Em particular, verifique que dois vetores não nulos são ortogonais se, e somente se, o angulo entre eles é 90^o.

6) Dados X, Y vetores no $\mathbb{R}^3$, mostre que a área do paralelogramo determinado pelos vetores é $|X \times Y|$. Mostre além disso que, $|X \times Y| = |X||Y|. \sin(\theta)$ em que θ é o ângulo formado pelo vetores X e Y.

7) Dados X, Y e Z vetores no $\mathbb{R}^3$, mostre que $\langle X, Y \times Z \rangle = \det \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$, onde a matriz é formada colocando os vetores em coluna. Além disso, mostre que o volume do paralelepípedo com arestas X, Y e Z é dado por $| \langle X, Y \times Z \rangle |$.

8) Considere x, y vetores no $\mathbb{R}^3$ com y diferente do vetor zero. Seja α uma constante real e $z = x - \alpha . y$ um vetor que é ortogonal a y. Mostre que a constante $\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$.

9) Dados X, Y, Z e W vetores no $\mathbb{R}^3$, mostre que $\langle X \times Y, Z \times W \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle X, Z \rangle & \langle Y, Z \rangle \\ \langle X, W \rangle & \langle Y, W \rangle \end{pmatrix}$.

10) Dados X, Y e Z vetores no $\mathbb{R}^3$, mostre que $X \times (Y \times Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z$.

11) Sejam X, Y e Z vetores no $\mathbb{R}^3$. Mostre que $X \times (Y \times Z) + Z \times (X \times Y) + Y \times (Z \times X) = 0$.