

Capítulo 1

- 1-2 $(C,D) \sim (P,Q) \Rightarrow (P,Q) \sim (C,D)$ (propriedade simétrica). Combinando com a hipótese $(A,B) \sim (P,Q)$, obtemos, pela propriedade transitiva, $(A,B) \sim (C,D)$.
- 1-10 (a) V (b) V (c) V (d) F
- 1-11 (a) V (b) F; contra-exemplo: tome $A = B = C = D$.
 (c) F (d) V
 (e) F; contra-exemplo: tome A, B, C e D colineares.
 (f) V

Capítulo 2

- 2-1 Não. Observe a Figura 2-3. Sendo A, B e C não-colineares, vale a relação $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, pois a medida de qualquer lado de um triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois. Para a outra pergunta, tome \vec{w} , na Figura 2-3, igual ao oposto de \vec{v} . Então

$$\|\vec{u} - \vec{w}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{AC}\| > \|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|$$

pois a medida de qualquer lado de um triângulo é maior que a diferença das medidas dos outros dois. Há, porém, casos em que valem as igualdades; tente imaginar alguns.

- 2-2 Substitua \vec{BC} por $\vec{BA} + \vec{AC}$ e aplique o Exercício Resolvido 2-5 e o Exercício 1-5 (b).
- 2-5 Prove que $\vec{u} + \vec{v} + (-\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$.
- 2-6 Não existem. Dados A e B quaisquer na borda da folha, seja C o ponto diametralmente oposto a B . Então, $\vec{CO} = \vec{OB}$ e, portanto, $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{CA}$. Além disso, $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$.
- 2-7 $\vec{HB} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ $\vec{DF} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$
- 2-8 (c) No primeiro e no terceiro tetraedros, \vec{AD} . No segundo, $\vec{0}$. No último sólido, \vec{AC} .
- 2-9 (a) \vec{AF} (b) \vec{BL} (c) \vec{AF}
- 2-10 (a) \vec{AG} (b) \vec{HD}
 (c) $\vec{AF} + \vec{AF}$. Não escrevemos $2\vec{AF}$, pois ainda não demos um significado para isso.
- 2-11 (a) \vec{EA} (b) \vec{FC} (c) \vec{FC} (d) \vec{OD}
- 2-12 $\vec{0}$
- 2-13 A e H .
- 2-14 $\vec{x} = \vec{GA}$, $\vec{y} = \vec{FA}$.

Capítulo 3

- 3-2 $6\vec{u}/\|\vec{u}\|$
- 3-3 Veja a Figura R-3-3.

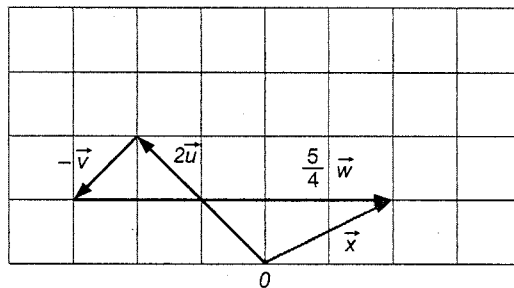


Figura R-3-3

- 3-4 $X = B$
- 3-5 M
- 3-7 (b) Este é o Exercício 1-5 (b); agora, você pode resolvê-lo de outro modo: $\vec{v} = -\vec{v} \Rightarrow 2\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (justifique).
- 3-10 $\vec{x} = -3\vec{u}/8 - 5\vec{v}/4$
- 3-11 (a) $\vec{x} = 5\vec{u}/7 + 2\vec{v}/7$ $\vec{y} = \vec{u}/7 - \vec{v}/7$
 (b) $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v}$ $\vec{y} = -\vec{u} - \vec{v}$
- 3-12 $\vec{x} = \vec{u}$ $\vec{y} = \vec{u}/2 + \vec{v}/2$ $\vec{z} = \vec{u}/2 - \vec{v}/2$
- 3-14 (a) Tomando norma em ambos os membros de $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, obtemos $\|\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$.
 (b) De (a) decorre que as únicas alternativas possíveis são $\lambda = \|\vec{u}\|/\|\vec{v}\|$ e $\lambda = -\|\vec{u}\|/\|\vec{v}\|$. Se $\lambda > 0$, ocorre a primeira, e, se $\lambda < 0$, a segunda.
- 3-15 Substituindo \vec{u} por $\alpha\vec{v}$ ($\alpha \neq 0$), mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\alpha^2 + 2\alpha + 1)\|\vec{v}\|^2$ e $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = (\alpha^2 + 1)\|\vec{v}\|^2$
- 3-16 Pelo Exercício Resolvido 3-8,
 $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AN}$ $\vec{CB} + \vec{CD} = 2\vec{CN}$ $\vec{NA} + \vec{NC} = 2\vec{NM}$
 Então: $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} = \dots = 4\vec{MN}$.
- 3-17 Sejam M, N e P , respectivamente, os pontos médios de AC, BD e MN . Pelo Exercício Resolvido 3-8,
 $\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OM}$ $\vec{OB} + \vec{OD} = 2\vec{ON}$ $\vec{OM} + \vec{ON} = 2\vec{OP}$
 Então, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \dots$

4-1 (a) Faça $Q = P$ em [4-2]. (b) Use [4-1].

4-7 $\vec{BA} = 2\vec{u}$

4-8 Um é o oposto do outro.

4-10 $X = C$

4-12 (a) O intervalo $[0, 1]$. (b) O intervalo $[0, +\infty[$.

(c) O intervalo $]-\infty, 1]$. (d) O conjunto \mathbb{R} .

(e) O intervalo $[-1, 1]$.

4-13 O baricentro dos n pontos A_1, A_2, \dots, A_n é o ponto G tal que $\sum_{i=1}^n \vec{GA}_i = \vec{0}$ e caracteriza-se por $G = O + (\sum_{i=1}^n \vec{OA}_i)/n$. No Exercício 3-17, $P = O + (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})/4$; logo, P é o baricentro de A, B, C e D . Disso decorre que $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = \vec{0}$; como exercício, prove esta última igualdade diretamente. Se $n = 2$, tomando $O = A_1$, obtemos $G = A_1 + \vec{A_1A_2}/2$, ou seja, G é o ponto médio do segmento A_1A_2 .

Capítulo 5

5-1 $\vec{CX} = \vec{CA}/(1+m) + m\vec{CB}/(1+m)$ $p = m/(1+m)$

5-2 $\vec{OX} = (1-m)\vec{OB} + m\vec{OC}$ $\vec{AX} = -\vec{OA} + (1-m)\vec{OB} + m\vec{OC}$

5-3 (a) $1/(1+r)$. Isso provém de $\vec{MN} = \vec{AC}/(1+r)$.

(b) Use a expressão de \vec{MN} do item (a) e uma análoga de \vec{QP} para concluir que $\vec{MN} = \vec{QP}$.

5-4 (a) Se X pertence à reta AB , então $\vec{AX} = \lambda\vec{AB}$. Faça aparecer C : $\vec{AX} = \vec{AC} + \vec{CX}$, $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$. Para a recíproca, faça aparecer A em $\vec{CX} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$.

(c) Para todo $\lambda \neq 1$, $\vec{AX} = \lambda\vec{AB}$ equivale a $\vec{XA} = \lambda\vec{XB}/(\lambda - 1)$, e $\lambda/(\lambda - 1)$ é negativo se, e somente se, $0 < \lambda < 1$.

5-5 Se X é interior ao triângulo, existe D interior ao lado AB tal que X é interior a CD . Logo, $\vec{AD} = \lambda\vec{AB}$ e $\vec{CX} = \mu\vec{CD}$, com $0 < \lambda < 1$ e $0 < \mu < 1$; mostre que $\vec{CX} = \mu(1-\lambda)\vec{CA} + \mu\lambda\vec{CB}$. Para a recíproca, tome $E = C + \vec{CX}/(\alpha + \beta)$ e mostre que X é interior a CE . De $\vec{AE} = \beta\vec{AB}/(\alpha + \beta)$ conclua que E é interior a AB e, portanto, X é interior ao triângulo.

5-6 Prove inicialmente que $\vec{MN} = (\vec{AB} + \vec{DC})/2$ e deduza dessa igualdade as duas afirmações do enunciado.

5-9 (b) $\vec{OX} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})/3$

5-10 Dois segmentos QR e ST são paralelos e congruentes se, e somente se, $\vec{QR} = \pm\vec{ST}$. Portanto, existindo o triângulo, as possibilidades para os vetores associados a seus lados são $\pm\vec{AN}$, $\pm\vec{BP}$ e $\pm\vec{CM}$. Como a soma desses vetores deve ser nula, a condição procurada é $\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$ ou $\vec{AN} + \vec{BP} - \vec{CM} = \vec{0}$ ou $\vec{AN} - \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$ ou $-\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$ (fizemos as oito combinações possíveis dos sinais + e - e eliminamos quatro, pois elas são duas a duas equivalentes).

5-11 (a) $\vec{AN} = -\vec{CA} - 3\vec{CB}/2$ $\vec{BP} = -\vec{CA}/2 - \vec{CB}$

$\vec{CM} = \vec{CA}/2 + \vec{CB}/2$

Como $\vec{AN} - \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$, está satisfeita a condição obtida no Exercício 5-10.

(b) Exprima \vec{AN} , \vec{BP} e \vec{CM} em função de \vec{CA} , \vec{CB} , α, β ; imponha a condição obtida no Exercício 5-10; e utilize hipótese de que α, β e γ pertencem a $[0, 1]$.

5-12 $\vec{CX} = (\vec{CA} + \alpha\vec{CB})/(1 + \alpha)$ $\vec{AY} = -\vec{CA} + \vec{CB}/(1 + \beta)$

$\vec{BZ} = \gamma\vec{CA}/(1 + \gamma) - \vec{CB}$

5-13 (a) $\vec{CX} = -\vec{AC} + 2\vec{AB}/3$ $\vec{AY} = \vec{AB}/4 + 3\vec{AC}/4$

(b) $P = A + 2\vec{AB}/9 + 2\vec{AC}/3$

5-14 (a) Prove que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Leftrightarrow \vec{AX} = (\alpha - 1)\vec{BY}$.

5-15 $-2\vec{BA} + 2\vec{BC}$

5-16 (a) $\vec{CX} = m\vec{CA}/(m + n) + n\vec{CB}/(m + n)$

(b) Se $m + n = 1$, então $\vec{CX} = m\vec{CA} + n\vec{CB}$, confirmando o enunciado do Exercício 5-4 (a).

5-17 $\alpha = -1$

5-18 (a) Os vetores \vec{CA}/b e \vec{CB}/a têm normas iguais (pois são ambos unitários). Por isso, o paralelogramo que se constrói para obter um representante de sua soma é, na verdade, um losango. Lembre-se de que as diagonais de um losango estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos internos.

(b) $\vec{CX} = a\vec{CA}/(a + b) + b\vec{CB}/(a + b)$ $\vec{AX} = b\vec{AB}/(a + b)$

5-19 (a) Veja a resposta do Exercício 5-18 (a).

(b) $\vec{CY} = a\vec{CA}/(a - b) - b\vec{CB}/(a - b)$ $\vec{AY} = -b\vec{AB}/(a - b)$

(d) Não existiria Y (AB seria paralelo à bissetriz do ângulo externo de vértice C).

5-20 No triângulo ABC , sejam X o ponto de interseção do lado AB com a bissetriz de \hat{C} , Y o ponto de interseção de BC com a bissetriz de \hat{A} e Z o ponto de interseção de AC com a bissetriz de \hat{B} . Sejam $a = \|\vec{CB}\|$, $b = \|\vec{CA}\|$, $c = \|\vec{AB}\|$ e p o perímetro do triângulo ($p = a + b + c$). Conforme o Exercício 5-18,

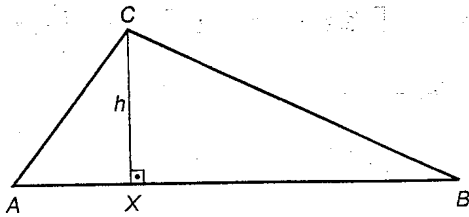
$\vec{CX} = a\vec{CA}/(a + b) + b\vec{CB}/(a + b)$

$\vec{AY} = b\vec{AB}/(b + c) + c\vec{AC}/(b + c)$

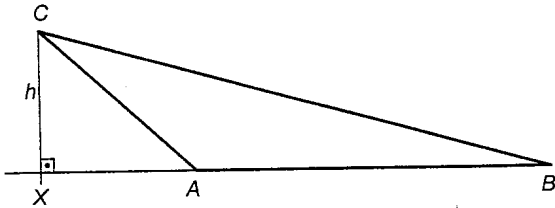
Prove que existem α e β tais que $R = A + \alpha\vec{AY} = C + \beta\vec{CX}$ e que, portanto, o ponto R pertence às retas CX e AY (para isso, substitua as expressões de \vec{CX} e \vec{AY} nesta última igualdade e obtenha um sistema de equações nas incógnitas α e β , que tem, por solução, $\alpha = (b + c)/p$, $\beta = (a + b)/p$). Conclua que $R = C + (a + b)\vec{CX}/p$. De modo análogo, prove que as retas CX e BZ têm um ponto comum, cuja expressão é igual à de R . Finalmente, para mostrar que R é interior ao triângulo, observe que esse ponto é interior ao segmento CX , pois $\vec{CR} = (a + b)\vec{CX}/p$ e $0 < (a + b)/p < 1$.

5-21 (a) Os ângulos \hat{A} e \hat{B} podem ser ambos agudos ou, então, um deles obtuso. No primeiro caso (Figura R-5-21 (a)) obtém-se, no triângulo AXC , $h = \|\vec{AX}\|\text{tg}\hat{A} = a\|\vec{AX}\|$ e, no triângulo CXB , $h = \|\vec{XB}\|\text{tg}\hat{B} = b\|\vec{XB}\|$; logo, $a\|\vec{AX}\| = b\|\vec{XB}\|$. Levando em conta que a e b são positivos e que X é interior ao segmento AB , conclua que $a\vec{AX} = b\vec{XB}$.

Se o ângulo \hat{A} é obtuso (Figura R-5-21 (b)), obtém-se, no triângulo AXC , $h = \|\vec{AX}\|\text{tg}(\hat{XAC}) = \|\vec{AX}\|(-\text{tg}\hat{A}) = -a\|\vec{AX}\|$ e, no triângulo CXB , $h = \|\vec{XB}\|\text{tg}\hat{B} = b\|\vec{XB}\|$. Portanto, $-a\|\vec{AX}\| = b\|\vec{XB}\|$. Lembrando que $a < 0$, $b > 0$ e que X é



(a)



(b)

Figura R-5-21

exterior ao segmento AB , conclua que $a\overline{AX} = b\overline{XB}$. Se o ângulo \hat{B} é obtuso, o procedimento é análogo. A expressão de \overline{CX} , válida para todos os casos, é

$$\overline{CX} = a\overline{CA}/(a+b) + b\overline{CB}/(a+b).$$

(b) $\overline{AY} = -\overline{CA} + b\overline{CB}/(b+c)$ $\overline{BZ} = a\overline{CA}/(a+c) - \overline{CB}$

(d) Seja $s = a + b + c$. Combinando os resultados dos itens (a) e (c), obtenha $\overline{CP} = a\overline{CA}/s + b\overline{CB}/s$ e conclua que, devido ao Exercício 5-5, P é interior ao triângulo se, e somente se, $a/s > 0$, $b/s > 0$ e $(a+b)/s < 1$. Isso equivale a $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, que, por sua vez, equivale a serem agudos os ângulos internos do triângulo.

5-22 $X = A + 3\overline{AB}/5 + \overline{AC}/10$

5-23 $(\sqrt{3} - 1)/2$ e $\sqrt{3} + 1$.

5-24 (a) $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \alpha\overline{BP} + \beta\overline{QC}$. Faça aparecer R para obter $(1 - \alpha)\overline{BC} = (\beta - \alpha)\overline{RC}$.

(b). Mostre, por semelhança de triângulos, que $\overline{AB} = (r_1/r_2)\overline{PB}$, $\overline{AC} = (r_1/r_3)\overline{QC}$ e $\overline{PR} = (r_2/r_3)\overline{QR}$. Utilize a parte (a).

Capítulo 6

6-2 Os vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos, de acordo com [3-1] (a). Portanto, se a seqüência é o par ordenado (\vec{u}, \vec{v}) , ela é LD e, se é uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, seus vetores são paralelos a um mesmo plano; logo, ela é LD. Se o número de vetores da seqüência é maior que 3, a seqüência é LD por definição.

6-3 (a) F (b) F (c) F (d) V

6-4 (a) Sejam $\vec{u} = \overline{PA}$, $\vec{v} = \overline{PB}$, $\vec{w} = \overline{PC}$. Se (\vec{u}, \vec{v}) é LD, então P , A e B são colineares. Logo, P , A , B e C são coplanares e, portanto, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.

(b) Raciocine por redução ao absurdo e utilize a parte (a).

6-5 (a) F (b) F (c) F (d) F

(e) V (f) V

Contra-exemplo para (a) e (b): tome (\vec{u}, \vec{v}) LI e $\vec{w} = \vec{0}$. Contra-exemplo para (c): tome (\vec{u}, \vec{v}) LI e $\vec{w} = 2\vec{u}$. Justificativa para (d): Exercício 6-4 (b). Para (e), tome $\vec{v} = 2\vec{u}$, $\vec{w} = 3\vec{u}$ e, depois, o mesmo exemplo da resposta (a). Para (f), tome $\vec{w} = \vec{0}$ e, depois, escolha A, B, C não-colineares, $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AC}$ e $\vec{w} = \overline{AD}$, com D não pertencente ao plano ABC .

6-6 (a) $\vec{a} = -2\vec{b} + 5\vec{c}$ (b) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ (c) $\vec{c} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$

6-7 (a) Porque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI. (b) Porque (\vec{u}, \vec{v}) é LI.
(c) Porque (\vec{u}, \vec{v}) é LI. (d) Porque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

6-8 Como treinamento, tente duas resoluções: uma semelhante à do Exercício Resolvido 6-11, outra por redução ao absurdo.

6-10 Na equação $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$, substitua o segundo membro por $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$ e use a hipótese.

6-11 $a = 2/3$, $b = -1/3$.

6-13 (a) Se $\alpha = 0$, não; se $\alpha \neq 0$, sim.

(b) Sim; veja o Exercício 6-9 (a).

(c) Nem sempre; veja o Exercício 6-14.

(d) Nem sempre; por exemplo, se $\vec{a} = \vec{u}$, $\vec{b} = \vec{v}$ e $\vec{c} = \vec{w}$, sim, e se $\vec{a} = -\vec{u}$, $\vec{b} = \vec{v}$ e $\vec{c} = \vec{w}$, não.

6-15 (a) Sendo $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ e $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ as seqüências do enunciado, exprima \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} em função de \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , depois em função de \vec{r} , \vec{s} , \vec{t} . Compare, para obter \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} em função de \vec{r} , \vec{s} , \vec{t} . Proceda então como no Exercício Resolvido 6-11.

(b) Essa afirmação é equivalente à feita em (a); se aquela é verdadeira, esta também é.

6-16 (a) $\overline{BG} = \overline{BA}/6 + \overline{BC}/3 + \overline{BD}/3$

(b) Da expressão de X obtém-se $\overline{BX} = m\overline{BG}$. Use (a) e imponha que $(\overline{AX}, \overline{AC}, \overline{AD})$ seja LD para obter $m = 6/5$.

6-17 $\overline{AX} = 2\overline{AD}/3 + \overline{AB}/3$

6-18 Esta é uma versão geométrica da Proposição 6-4 (existência) e do Corolário 6-12 (unicidade).

Capítulo 7

7-1 0

Use $(a_1, a_2, a_3)_E = (b_1, b_2, b_3)_E \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

7-3 (a) (3, 0, 6) (b) (-3, -3, -3) (c) (8, 4, -3)

7-4 Não.

7-5 $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$

7-6 Não.

7-7 (a) LI (b) LD (c) LI (d) LD

7-8 $m = 2$, $n = 4$.

7-9 (a) LI (b) LD (c) LD (d) LI

7-10 \vec{u} não é combinação linear de \vec{v} , \vec{w} , qualquer que seja m . A tripla $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $m = 0$ ou $m = 3$. Isso reitera o que foi dito na Observação 6-6.

7-11 (a) -1 e 1. (b) 0 e 1. (c) Não existe. (d) 0 e 2.

7-12 0 e 1.

7-13 Não.