7-15 $a \neq b$

7-16 -1, $1/2$ e $1/2$ (nessa ordem).

7-17 (a) $m \neq -4/7$ (b) $m = 1$

7-18 (a) $m \neq 2$ (b) Não existem.

7-19 (b) $m = -1/4$

7-20 (a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 5 (d) $\sqrt{21}$

7-21 (a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AD}$ não são paralelos a um mesmo plano; logo, são LI. Por isso, formam uma base, que não é ortonormal, pois $\overrightarrow{AB}$, por exemplo, não é unitário.

(b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

(c) $d^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$.

(d) [7-4] só pode ser usada se a base for ortonormal.

Capítulo 8

8-2 $a = 3/2$, $b = -1$, $c = -1/2$.

8-3 $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \vec{u} = 12\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$

8-4 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \vec{u} = 11\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$

8-5 $m \neq -1$ e $m \neq 1$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix}$

8-6 $\vec{u} = \vec{f}_1/2 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3/14$

8-7 (2,–3,6)

8-8 (a) LI (b) LD

8-9 Sim.

$\vec{u} = -\vec{a} - \vec{b}/3 + 2\vec{c}/3 \qquad \vec{v} = \vec{a}/2 + \vec{b}/3 + \vec{c}/3 \qquad \vec{w} = -\vec{b}/3 + 2\vec{c}/3$

8-10 (a) Verdadeira. Escreva $\vec{f}_j$ e $\vec{g}_j$ como combinação linear dos vetores de E.

(b) Verdadeira. Se $M_{EF} = M_{GF}$, então $M_{EF}^{-1} = M_{GF}^{-1}$, ou seja, $M_{FE} = M_{FG}$, e recaímos no caso (a).

(c) Verdadeira. Lembrando que $I_3 = M_{EE}$, obtemos $M_{EF} = M_{EE}$, recaindo no caso (a).

(d) Falsa. Contra-exemplo: $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

8-11 (a) $M_{EF} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (b) $(-1/2,1/2,-1)_F$

8-12 $M_{FE} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad M_{EF} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{EG} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad M_{GE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{FG} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+1)/2 & (\sqrt{3}+1)/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ (\sqrt{3}-1)/2 & (\sqrt{3}-1)/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$M_{GF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & \sqrt{3}/2 \\ (\sqrt{3}-1)/2 & 0 & -(\sqrt{3}+1)/2 \end{bmatrix}$

$M_{EE} = M_{FF} = M_{GG} = I_3$

Capítulo 9

9-1 (a) V (b) V (c) V (d) V

9-2 $0{,}6\,\pi$ radianos.

9-3 (a) 150° (b) 90° (c) 60° (d) 30°

9-4 45° e 45°, ou 135° e 135°.

9-5 $-1/2$.

9-6 -6

9-7 $\vec{v} = (ba^{-1})\vec{u}$ dá o maior valor, que é ab; $\vec{v} = -(ba^{-1})\vec{u}$ dá o menor valor, que é $-ab$.

9-8 $a = 1$ e $b = 2$, ou $a = 2/5$ e $b = 11/5$.

9-9 (a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) arccos(1/3)

(d) $\pi/3$ (e) $3\pi/4$

Para o item (e), note que $\vec{u} = 300(1,1,0)$ e $\vec{v} = 1000(-2,-1,2)$; use isso para simplificar as contas.

9-10 (a) $1/4$, $-3/4$ e $\sqrt{6}/4$; $-1/4$, $3/4$ e $-\sqrt{6}/4$.

9-11 (a) -9 (b) -2 (c) $\pm\sqrt{6}$ (d) Não existe.

9-12 (1,2,3)

9-13 (a) (3,–3,–3) e (–3,3,3) (b) (3,–3,3)

9-14 (1,–1,1)

9-15 (1,–1,–1)

9-16 $\vec{u} = (1,0,2)$ ou $\vec{u} = (-1,0,-2)$. Sim, o segundo.

9-17 $(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,1)$ e $(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,-1)$.

9-18 É o conjunto dos vetores $\lambda(7,8,-11)$, com $\lambda \neq 0$.

9-19 $\vec{u} = (1/2,3/2,2) + (1/2,-3/2,1)$.

9-21 (a) Verdadeiro. Utilize a Definição 9-2 (a) (para $\Leftarrow$) e a Proposição 9-7 (d) (para $\Rightarrow$).

(b) Falso; contra-exemplo: $\vec{u} = (1,1,1)_E$ e $\vec{v} = (1,1,-2)_E$, sendo E uma base ortonormal; $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos e $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

(c) Verdadeiro; escreva $\vec{u}\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}\cdot[\vec{v} + (-1)\vec{w}]$ e aplique a Proposição 9-7, (a) e (b).

(d) Verdadeiro; conseqüência da Proposição 9-7 (b) e (d).

9-22 Comutativa – item (c); distributiva – item (a). A propriedade associativa não tem lugar na álgebra do produto escalar, pois não existe produto escalar de três ou mais vetores. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}$ é um número real, não podemos nem pensar em calcular o produto escalar desse número por $\vec{w}$.

9-23 (a) $-1/2$ (b) $-7/2$ (c) -40 (d) 33

9-24 (a) Sim. Para uma resolução rápida, veja o Exercício 7-14. Para exercitar-se com determinantes, siga os passos da resolução do Exercício Resolvido 9-9.

(b) Sim, vale também para dois vetores.

9-25 (a) Use a Proposição 9-7 (d).

(b) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ são vetores de **T**, então

$(\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n)\cdot\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1\cdot\vec{w} + \dots + \alpha_n\vec{v}_n\cdot\vec{w} = 0$

(c) Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ fosse LD, $\vec{w}$ seria combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Então, $\vec{w}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \dots = 0$, contrariando (a).

(d) Se existissem $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ LI em **T**, $\vec{w}$ seria gerado por eles: $\vec{w} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Siga os passos da resposta (c).

(e) Seja $\vec{z}$ um vetor qualquer de **T**. Pelo item anterior, $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ é LD e, como $(\vec{u},\vec{v})$ é LI, $\vec{z}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$.

9-28 $-13/4$. Você pode partir de $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\cdot(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = 0$ e desenvolver, usando a Proposição 9-7. Outro modo é proceder como na resolução do Exercício Resolvido 9-9.

9-29 Não, pois $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI.

9-30 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = r^2[1 + \cos\alpha - \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)]$

9-31 52

9-32 (a) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}/2$ $\quad\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

(b) $\arccos(-3/\sqrt{10})$

9-33 $\arccos(3/\sqrt{22})$

9-34 $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$; $\arccos(\sqrt{2}/4)$.

9-35 Sendo a a medida de uma aresta e AB e CD arestas opostas,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$= a^2\cos 120° + a^2\cos 60° = 0$

9-36 Escolha uma base ortonormal conveniente e exprima $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ nessa base. Usar o Exercício 9-10 (d) também é uma boa opção.

9-37 $19/\sqrt{481}$

9-38 Observe que (c) é a tradução de (b) para a linguagem geométrica.

9-40 $\arccos(4/\sqrt{26})$

9-42 Como $\vec{w}$ é paralelo ao plano ABC, é suficiente provar que $\text{ang}(\vec{u},\vec{w}) = \text{ang}(\vec{v},\vec{w})$; para isso, calcule os co-senos. Note que, devido ao Exercício 9-27, $\text{ang}(\vec{u},\vec{w}) = \text{ang}(\vec{a},\vec{w})$ e $\text{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \text{ang}(\vec{b},\vec{w})$.

9-44 Sejam A, B e C os vértices do triângulo, M o ponto médio de BC, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Em (a), você deve provar que, se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, então $(\vec{v} - \vec{u})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = 0$ e $\text{ang}(\vec{u},\vec{u} + \vec{v}) = \text{ang}(\vec{v},\vec{u} + \vec{v})$ (também se pode aplicar o Exercício 9-42, abreviando o trabalho). Em (b), se $\theta_1 = \text{ang}(-\vec{u},\vec{v} - \vec{u})$ e $\theta_2 = \text{ang}(-\vec{v},\vec{v} - \vec{u})$, prove que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

9-45 Utilize o Exercício 9-42 para obter vetores paralelos às bissetrizes.

9-46 Este é um caso particular do Exercício 9-42.

9-47 (a) Exprima todos os vetores do primeiro membro em termos de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (para isso, basta fazer aparecer A onde ainda não aparece) e desenvolva. É fácil escrever o primeiro membro sem tê-lo decorado: escreva as permutações cíclicas da "palavra" ABC (isto é, ABC, BCA, CAB; cada uma é obtida da anterior levando-se a primeira letra para o final), acrescente a elas a letra D ($ABCD$, $BCAD$, $CABD$), coloque as setas e complete com os símbolos $\cdot$ e $+$.

(c) No triângulo ABC, considere as retas-suportes das alturas relativas aos vértices A e B. Seja D seu ponto de interseção. Use a Relação de Euler para provar que $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$ e que, por isso, D pertence à reta que contém a terceira altura.

9-48 (b) Aplicando a parte (a) aos versores de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (veja o Exercício 9-27), obtém-se $0 \le 3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

(c) Devido ao Exercício 7-14, basta considerar o caso em que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são unitários. Procedendo como no Exercício Resolvido 9-9, você pode provar que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base se, e somente se, $\cos\alpha \ne 1$ e $\cos\alpha \ne -1/2$. Pelo item (b), isso equivale a $0 < \alpha < 120$ (em graus). Interprete geometricamente, pensando em um tripé articulado.

9-49 (a) $\arccos(3/\sqrt{21})$ (b) $\sqrt{21}$

9-51 (a) e (b): se um dos vetores é nulo, vale a igualdade. Senão, use a Definição 9-2(b).

(c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \le \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + \|\vec{v}\|^2 \le \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$. Usamos, na segunda desigualdade, o item (a).

(d) A tese equivale a $-\|\vec{u} - \vec{v}\| \le \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \le \|\vec{u} - \vec{v}\|$. Escrevendo $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$ e usando (c), você prova uma das desigualdades. Escrevendo $\vec{v} = (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u}$, prova a outra.

9-52 (a) 0 (b) $\|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$ (c) $-\|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$

9-53 (a) $(18/11,-6/11,6/11)$ (b) $(-10/9,5/9,10/9)$

(c) $(0,0,0)$ (d) $(1,2,4)$

9-54 (a) $\vec{v} = (0,3/10,9/10) + (-1,-33/10,11/10)$

(b) $\vec{v} = (0,1,2) + (0,0,0)$ (c) $\vec{v} = (0,0,0) + (1,2,-1)$

9-55 $(3/4,-\sqrt{3}/4,1/2)$ e $(3/4,\sqrt{3}/4,1/2)$.

9-56 (a) É conseqüência imediata de [9-11].

(b) Utilize o Exercício 9-26 e a parte (a).

9-58 Use (b) para resolver (c); a hipotenusa é AB.

9-60 (a) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais ou iguais.

(b) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais ou de mesmo comprimento.

(c) Partindo da hipótese, use o argumento: se $\alpha\vec{a} = \beta\vec{b}$, e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são nulos, então $\alpha = \beta = 0$ ou $\vec{a} /\!/ \vec{b}$.

9-61 (a) Basta notar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI. (b) 2 e 3.

9-62 (b) $\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^3}{\|\vec{u}\|^4\|\vec{v}\|^2}\vec{u}$

(c) $\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^n}{\|\vec{u}\|^n\|\vec{v}\|^n}\vec{v}$ para n par, e $\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^n}{\|\vec{u}\|^{n+1}\|\vec{v}\|^{n-1}}\vec{u}$ para n ímpar (a demonstração se faz por indução finita). Note que, se θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a resposta pode ser escrita sob a forma

$(\cos^n\theta)\vec{v}$ para n par;

$(\cos^{n-1}\theta)\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = (\cos^{n-1}\theta)\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, para n ímpar.

(d) 135/16 (use o resultado do item (c), com $n = 6$).

9-64 M_{EB} é uma *matriz triangular superior*, isto é, todos os seus elementos situados abaixo da diagonal principal são nulos.

9-65 $\vec{i} = (1/3,2/3,2/3)$, $\vec{j} = (2/3,-2/3,1/3)$, $\vec{k} = (2/3,1/3,-2/3)$.

9-66 (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

9-67 De $M^tM = I$ decorre $(\det M^t)(\det M) = 1$, isto é, $(\det M)^2 = 1$. As matrizes dos itens (a) e (b) do Exercício 9-66 mostram que não vale a recíproca.

9-68 (b) $\vec{u} = (0,-1,1)_E$, $\vec{v} = (0,1,1)_E$, $\vec{w} = (-1,0,0)_E$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$.

(d) $M_{EF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ $M_{FE} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(são transpostas uma da outra, devido ao Exercício Resolvido 9-17).

(e) $\overrightarrow{HB} = (-1,1,1)_E = (0,\sqrt{2},1)_F$

9-69 $\vec{a} = (2/\sqrt{3},-3/\sqrt{2},7/\sqrt{6})$

Lembrou-se de usar o Exercício Resolvido 9-17?

9-70 (1) Simplifica o cálculo das coordenadas de um vetor (Exercício 9-26).

(2) Permite o cálculo da norma de um vetor pela fórmula [7-4].

(3) Permite o cálculo do produto escalar usando-se a Proposição 9-4.

(4) Facilita a inversão da matriz M_{EF} para obter M_{FE} (Exercício Resolvido 9-17). *E outras vantagens ainda virão...*

Capítulo 10

10-1 Use as propriedades de determinantes, como na demonstração da Proposição 10-2.

10-2 (a) Concordantes. (b) Concordantes.

(c) Discordantes.

10-4 (a) Discordantes. (b) Concordantes.

(c) Discordantes. (d) Concordantes.

10-5 (a) $t \neq -1$ e $t \neq -1/3$

(b) Concordantes: $t > -1/3$. Discordantes: $-1 \neq t < -1/3$.

(c) Sim: F(0) = E, pois $M(0) = I_3$.

(d) $t_0 = 1$ $\quad\vec{a} = 3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ $\quad\vec{b} = -\vec{u} + 2\vec{w}$ $\quad\vec{c} = -3\vec{v} + 5\vec{w}$

10-6 Escreva as matrizes de mudança de base e calcule seus determinantes.

10-7 Não, pois as bases do enfeite escolhido, seja ele qual for, são azuis. Seria o mesmo que dizer, na terminologia "oficial": "$\mathbb{V}^3$ está orientado por uma base negativa".

10-8 (a) F pertence a **A**. (b) F pertence a **B**.

10-9 Dextras: E e F; sinistras: G e H.

10-10 (a) Concordantes. (b) Discordantes.

10-11 Na maioria dos aspiradores, a rosca é invertida. Se você não conseguiu retirar o bocal, tente girar em sentido contrário. Isso mostra que, para que a Regra do saca-rolhas funcione bem, é preciso que a rosca imaginada seja uma rosca convencional.

Capítulo 11

11-1 3

11-2 7/2 e 126.

11-3 8

11-4 (a) Use a Observação 11-2 (c).

(b) $\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\|/\|\overrightarrow{CB}\|$ $\qquad\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\|/\|\overrightarrow{CA}\|$

(estas não são as únicas respostas possíveis).

(c) $d(C,r) = \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|/\|\overrightarrow{AB}\|$.

11-5 (1/3,1/3,1/6)

11-6 $2\sqrt{3}$

11-7 $\vec{0}$, pois o segundo é o produto de $-\sqrt{3}$ pelo primeiro.

11-8 (a) $2\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $4\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{3}$ (e) $8\sqrt{3}$

11-9 $\vec{u} = (2(4-\sqrt{3}),4(1-\sqrt{3}),1)$. Escreva $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ e calcule seu produto escalar por $\vec{a}$, por $\vec{b}$ e por $\vec{c}$ para obter os valores de α, β e γ. Em seguida, mostre que $\vec{c} = 4\vec{a}\wedge\vec{b}$.

11-10 Sejam a e b números reais positivos fixados. Interpretação geométrica de (a): dados um paralelogramo e um retângulo cujos lados medem a e b, a área do primeiro não pode ser maior que a do segundo. Interpretação geométrica de (b): dentre os paralelogramos cujos lados medem a e b, somente os retângulos têm a maior área possível, que é ab.

11-11 (b) 4 (c) $3\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}a^2/2$ (e) 1

Utilize a igualdade (b_4) do item (a) para resolver (b), (c) e (d).