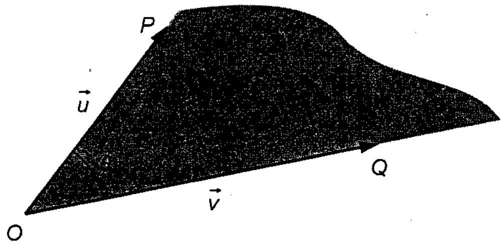
M

9-1 Definição

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Chama-se **medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$** a medida θ do ângulo $P\hat{O}Q$, sendo (O,P) e (O,Q), respectivamente, representantes quaisquer de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *com mesma origem* (Figura 9-2 (a)). Sobre o número θ impõe-se a restrição $0 \leq \theta \leq \pi$ se a unidade adotada for *radiano*, ou $0 \leq \theta \leq 180$, se for *grau*. Indica-se θ por ang$(\vec{u},\vec{v})$, especificando, se necessário, a unidade adotada (grau ou radiano).



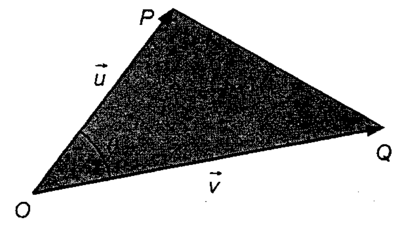


Figura 9-2

Embora tenhamos abdicado de definir ângulo entre dois vetores não-nulos, optando por trabalhar com o conceito de medida angular, vamos preservar, por conveniência, alguns termos utilizados na Geometria (será um abuso de linguagem benéfico). Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos e a medida angular θ entre eles, em graus [respectivamente, em radianos], é menor que 90 [respectivamente, menor que $\pi/2$], diremos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *formam ângulo agudo*. Empregaremos também expressões como "$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo reto", "$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo obtuso", "$\vec{u}$ forma ângulos congruentes com $\vec{v}$ e $\vec{w}$", "$\vec{u}$ forma ângulos suplementares com $\vec{v}$ e $\vec{w}$" etc.

EXERCÍCIOS

9-1 Verdadeiro ou falso?

(a) A medida angular entre um vetor não-nulo e ele mesmo é 0 (graus ou radianos).

(b) A medida angular entre dois vetores não-nulos e ortogonais é $\pi/2$ radianos.

(c) A medida angular entre dois vetores de sentido contrário é 180 graus.

(d) Não existem $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que ang$(\vec{u},\vec{v})$ = arcsen(−1/2).

9-2 Em uma roleta de centro O, o preto 17 ocupa a posição P. Após um giro de $7\pi/5$ radianos, passa a ocupar a posição Q. Qual é a medida angular em radianos entre $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$?

9-3 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O, como na Figura 2-10. Obtenha as seguintes medidas angulares em graus:

(a) ang$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE})$

(b) ang$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF})$

(c) ang$(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF})$

(d) ang$(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BF})$

EXERCÍCIOS

9-4 Os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, têm normas iguais, e $\vec{w}$ é gerado por eles. Sabendo que $\vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ e que $\vec{w}$ não é nulo, obtenha as medidas angulares, em graus, entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

9-5 Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$.

9-6 Os lados do triângulo eqüilátero ABC têm medida 2. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

9-7 São dados os números reais positivos a e b, e o vetor $\vec{u}$, de norma a. Dentre os vetores de norma b, qual é o que torna máximo o produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$? E mínimo? Quais são esses valores máximo e mínimo?

Decorre de [9-2] e da definição de produto escalar que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos, vale a igualdade $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$. Por outro lado, se um desses vetores é nulo, ela também vale, pois ambos os membros são nulos. Fica assim demonstrada a proposição seguinte.

EXERCÍCIO

9-8 São dadas as bases ortonormais E e F. Determine a e b, sabendo que $\vec{u} = (1,1,2)_E = (b,a,1)_F$ e $\vec{v} = (1,2,3)_E = (3,1,2)_F$.

9-5 *Exercício Resolvido*

Em relação a uma base ortonormal, são dados $\vec{u} = (2,0,-3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resolução

Sendo

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,0,-3)\cdot(1,1,1) = 2\cdot1 + 0\cdot1 + (-3)\cdot1 = -1 \qquad \text{(pela Proposição 9-4)}$$

$$\|\vec{u}\| = \|(2,0,-3)\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{(por [7-4])}$$

$$\|\vec{v}\| = \|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \qquad \text{(por [7-4])}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{39}} \qquad \text{(por [9-3])}$$

concluímos que $\theta = \arccos(-1/\sqrt{39})$.

EXERCÍCIOS

9-9 São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(a) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (-2,10,2)$.

(b) $\vec{u} = (3,3,0)$, $\vec{v} = (2,1,-2)$.

(c) $\vec{u} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,1)$.

(d) $\vec{u} = (\sqrt{3}/2,1/2,0)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}/2,1/2,\sqrt{3})$.

(e) $\vec{u} = (300,300,0)$, $\vec{v} = (-2000,-1000,2000)$.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 9-11 a 9-19, todas as coordenadas referem-se a uma base ortonormal fixada.

9-11 Determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

(a) $\vec{u} = (x,0,3)$, $\vec{v} = (1,x,3)$.

(b) $\vec{u} = (x,x,4)$, $\vec{v} = (4,x,1)$.

(c) $\vec{u} = (x+1,1,2)$, $\vec{v} = (x-1,-1,-2)$.

(d) $\vec{u} = (x,-1,4)$, $\vec{v} = (x,-3,1)$.

9-12 Determine $\vec{u}$ ortogonal a $(-3,0,1)$ tal que $\vec{u}\cdot(1,4,5) = 24$ e $\vec{u}\cdot(-1,1,0) = 1$.

9-13 (a) Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2,3,-1)$ e a $\vec{v} = (2,-4,6)$.

(b) Qual dos vetores obtidos no item (a) forma ângulo agudo com $(1,0,0)$?

9-14 Obtenha a tripla de coordenadas do vetor que tem norma $\sqrt{3}$, é ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$, e forma ângulo obtuso com $(0,1,0)$.

9-15 Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4,-1,5)$ e $\vec{w} = (1,-2,3)$ tal que $\vec{u}\cdot(1,1,1) = -1$.

9-16 Dados $\vec{v} = (1,1,1)$, $\vec{w} = (0,1,-1)$ e $\vec{t} = (2,1,-1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja LD. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1,0,0)$?

9-17 Obtenha $\vec{u}$ ortogonal a $(1,1,0)$ tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ e a medida angular em graus entre $\vec{u}$ e $(1,-1,0)$ seja 45.

9-18 Descreva o conjunto de todos os vetores $\vec{w}$ ortogonais a $\vec{v} = (2,1,2)$ tais que $\vec{u} = (1,1,-1)$ seja combinação linear de $\vec{v}$, $\vec{w}$.

9-19 Decomponha $\vec{u} = (1,0,3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1,1,1)$ e $(-1,1,2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.

EXERCÍCIOS

9-20 (a) Prove os itens (b), (c) e (d) da proposição anterior.

(b) Prove que, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os escalares α e β, vale a igualdade $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v} + \beta\vec{u}\cdot\vec{w}$. Esta propriedade é chamada **bilinearidade do produto escalar**. (Usando o Princípio de Indução Finita, pode-se provar que a propriedade vale para qualquer número de parcelas: $\vec{u}\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n) = \alpha_1\vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{u}\cdot\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{u}\cdot\vec{v}_n$.)

9-21 Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

(a) $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

(c) $\vec{u}\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w}$

(d) $\vec{u} = -\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} \le 0$

9-22 Observe a Proposição 9-7. Apenas como exercício, pois esta nomenclatura não é habitualmente usada, relacione as palavras *comutativa* e *distributiva* a um ou mais itens do enunciado. Explique a ausência de uma propriedade *associativa*, que seria "$(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$".

9-23 Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ unitários, $\|\vec{w}\| = 4$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -2$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = -4$, e $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \pi/3$ radianos, calcule:

(a) $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\cdot\vec{u}$

(b) $(2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w})\cdot(-\vec{u} + \vec{v})$

(c) $(5\vec{u} - \vec{w})\cdot(\vec{w} - 2\vec{u})$

(d) $(\vec{w} - \vec{v} + \vec{u})\cdot(-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$

Exercícios

9-24 (a) No exercício resolvido anterior, suponha que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam não-nulos, não necessariamente unitários. Pode-se ainda concluir que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base?

(b) Mostre que, se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores não-nulos e ortogonais dois a dois, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI. Vale o mesmo resultado para dois vetores?

9-25 Sejam $\vec{w} \neq \vec{0}$ e **T** o conjunto dos vetores ortogonais a $\vec{w}$. Prove que

(a) $\vec{w}$ não pertence a **T**;

(b) qualquer combinação linear de vetores de **T** pertence a **T**;

➧ (c) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores LI de **T**, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI;

➧ (d) três vetores quaisquer de **T** são LD;

➧ (e) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores LI de **T**, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram **T**, isto é, todo vetor de **T** é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ (compare com o Exercício 6-18).

9-26 Prove que as coordenadas de qualquer vetor $\vec{u}$ na base ortonormal $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ são iguais aos produtos escalares de $\vec{u}$ por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, ou seja: $\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{k}$.

9-27 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não-nulos tais que $\vec{u} = \alpha\vec{a}$ e $\vec{v} = \beta\vec{b}$. Mostre que $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \text{ang}(\vec{a},\vec{b})$ se $\alpha\beta > 0$ e $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \pi - \text{ang}(\vec{a},\vec{b})$ se $\alpha\beta < 0$ (estamos usando o radiano como unidade de medida angular). Conclua que $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \text{ang}(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$. Interprete geometricamente.

9-28 Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = 3/2$, $\|\vec{v}\| = 1/2$ e $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{u}$.

9-29 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de norma 1 tais que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 1/2$. Verifique se $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$.

9-30 Na Figura 9-3, a circunferência de centro O tem raio r. Calcule $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ em função de r e das medidas α e β dos ângulos indicados. Aplique o resultado para provar que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

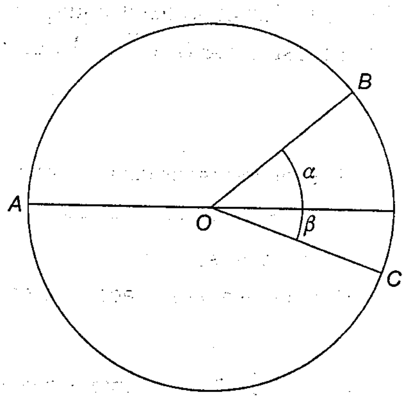


Figura 9-3

9-31 Calcule $\|2\vec{u} + 4\vec{v}\|^2$, sabendo que $\vec{u}$ é unitário, $\|\vec{v}\| = 2$, e a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $2\pi/3$ radianos.

9-32 O lado do quadrado da Figura 9-4 (a) mede 2 e M é o ponto médio de BC.

(a) Escreva $\overrightarrow{DM}$ e $\overrightarrow{BD}$ como combinação linear de $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$.

(b) Calcule a medida angular entre $\overrightarrow{DM}$ e $\overrightarrow{BD}$.

9-33 A Figura 9-4 (b) mostra um cubo. Sabendo que o comprimento de CM é o dobro do comprimento de GM, calcule a medida do ângulo $B\hat{A}M$.

9-34 Na Figura 9-4 (c), a aresta do cubo mede 3 e P é um ponto sobre HF tal que a medida angular entre $\overrightarrow{DP}$ e $\overrightarrow{DH}$ é 30°. Calcule as normas de $\overrightarrow{DP}$ e $\overrightarrow{HP}$ e a medida em radianos do ângulo $P\hat{D}C$.

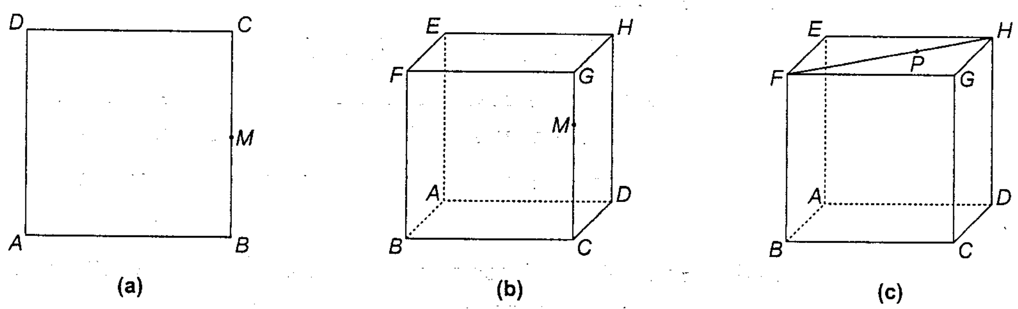


Figura 9-4

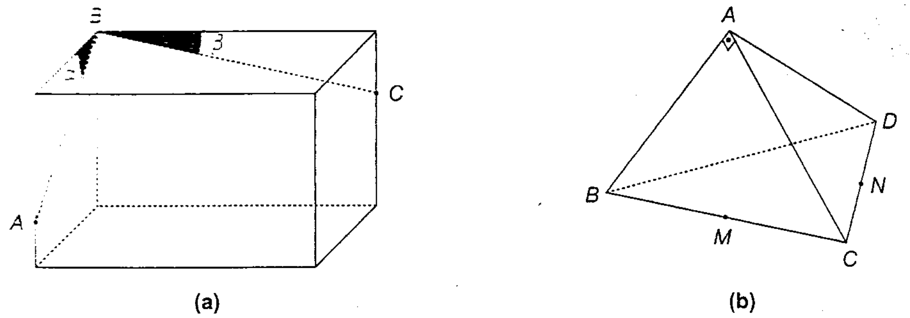


Figura 9-5

9-38 Prove que:

(a) $4\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$; (b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$;

(c) as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.

9-39 Prove que:

(a) $(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$;

(b) as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losango;

(c) $\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}$ é ortogonal a $\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v}$.

9-40 A medida angular em radianos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/4$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule a medida angular em radianos entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

9-41 Prove que:

(a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$;

(b) a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados;

(c) a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.

9-42 Sejam A, B e C pontos não-colineares, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Prove que, se $\vec{a}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido e o mesmo ocorre com $\vec{b}$ e $\vec{v}$, e se $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$, então $\vec{a} + \vec{b}$ é paralelo à bissetriz de $B\hat{A}C$. Em particular, o vetor soma dos versores de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é paralelo à bissetriz de $B\hat{A}C$.

9-43 Prove que as diagonais de um losango estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

9-44 Prove que:

(a) a mediana e a altura relativas à base de um triângulo isósceles coincidem, e estão contidas na bissetriz do ângulo do vértice;

(b) um triângulo é isósceles se, e somente se, ele tem dois ângulos internos congruentes.

9-45 Prove que as bissetrizes de ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.

9-46 Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores não-nulos, de normas p e q, respectivamente. Prove que o vetor $\vec{w} = q\vec{u} - p\vec{v}$ é paralelo à bissetriz de $B\hat{A}C$.

9-47 Prove que são verdadeiras as afirmações seguintes.

➧ (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$, quaisquer que sejam os pontos A, B, C e D (**Relação de Euler**).

(b) Se um tetraedro tem dois pares de arestas opostas ortogonais, as duas arestas restantes são ortogonais.

(c) As três retas que contêm as alturas de um triângulo são concorrentes num ponto, chamado *ortocentro* do triângulo. (Este resultado foi objeto do Exercício 5-21. Sua verificação, com o auxílio da Relação de Euler, fica muito simplificada.)

9-48 (a) Prove que $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w})$, quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

➧ (b) Dados os vetores não-nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sejam $\alpha = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$, $\beta = \text{ang}(\vec{u},\vec{w})$ e $\gamma = \text{ang}(\vec{v},\vec{w})$. Prove que $-3/2 \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3$.

➧ (c) Supondo, no item anterior, que $\alpha = \beta = \gamma$, verifique se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base.

9-49 No paralelogramo $ABCD$, os lados AB e AD medem, respectivamente, 3 e 9, e o ângulo interno de vértice A mede 60°. Sejam M o ponto de DC e N o ponto de AD tais que $\|\overrightarrow{DM}\| = 3\|\overrightarrow{MC}\|$ e $3\|\overrightarrow{AN}\| = 2\|\overrightarrow{AD}\|$. Calcule:

(a) a medida do ângulo $M\hat{A}B$;

➧ (b) a norma de $\overrightarrow{AX}$, sendo X o ponto de interseção de AM com BN.

9-50 ➧ Seja $ABCD$ um retângulo de diagonal BD. Prove que $\|\overrightarrow{DP}\|^2 + \|\overrightarrow{BP}\|^2 = \|\overrightarrow{AP}\|^2 + \|\overrightarrow{CP}\|^2$, qualquer que seja o ponto P.

9-51 Prove que:

(a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (**Desigualdade de Schwarz**);

➧ (b) vale a igualdade em (a) se, e somente se, $(\vec{u},\vec{v})$ é LD;

➧ (c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (**Propriedade Triangular**);

➧ (d) $\big|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$;

➧ (e) uma condição necessária e suficiente para que valha a igualdade em cada um dos itens (c) e (d) é: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são de mesmo sentido ou $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Nos Exercícios 9-53 a 9-55, todas as coordenadas referem-se a uma base ortonormal fixada $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

9-53 Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ em cada caso.

(a) $\vec{v} = (1,-1,2)$, $\vec{u} = (3,-1,1)$. (b) $\vec{v} = (-1,1,1)$, $\vec{u} = (-2,1,2)$.

(c) $\vec{v} = (1,3,5)$, $\vec{u} = (-3,1,0)$. (d) $\vec{v} = (1,2,4)$, $\vec{u} = (-2,-4,-8)$.

9-54 Em cada caso, decomponha $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

(a) $\vec{v} = (-1,-3,2)$, $\vec{u} = (0,1,3)$. (b) $\vec{v} = (0,1,2)$, $\vec{u} = (0,-1,-2)$. (c) $\vec{v} = (1,2,-1)$, $\vec{u} = (2,-1,0)$.

9-55 Determine os vetores unitários $\vec{u} = (x,y,z)_B$ tais que a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{k}$ seja $\vec{k}/2$ e a medida angular entre $\vec{v} = (x,y,0)_B$ e $\vec{i}$ seja $\pi/6$ radianos.

9-56 (a) Mostre que, se $\vec{u}$ é unitário, então $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$.

(b) Seja $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal. Mostre que todo vetor $\vec{u}$ é a soma de suas projeções ortogonais sobre $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Isto está ilustrado na Figura 9-8.

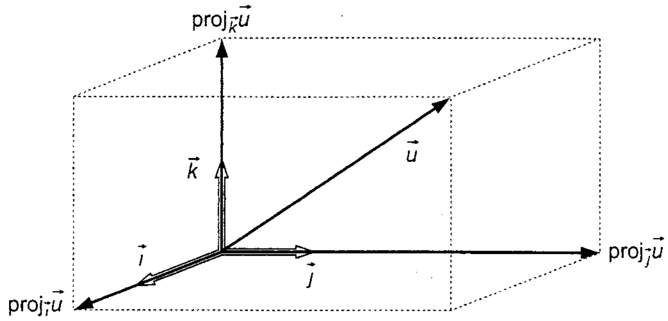


Figura 9-8

9-57 Prove que, se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\lambda\vec{u}}\vec{v}$.

9-58 Prove que:

(a) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}$ se, e somente se, $(\vec{u},\vec{v})$ é LD;

(b) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{u}$ se, e somente se, $(\vec{v} - \vec{u}) \perp \vec{u}$;

(c) se A, B e C são pontos distintos e $\overrightarrow{AC} = \text{proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$, então o triângulo ABC é retângulo (diga, neste caso, qual é a hipotenusa).

9-59 Prove que, se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\text{proj}_{\vec{u}}(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} + \beta\text{proj}_{\vec{u}}\vec{w}$, para quaisquer $\vec{v}$, $\vec{w}$, α e β.

9-60 Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não-nulos.

➧ (a) Enuncie uma condição necessária e suficiente para que a projeção ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ seja igual à projeção ortogonal de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

(b) Enuncie uma condição necessária e suficiente para que a projeção ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ e a de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ tenham normas iguais.

(c) Prove que, se $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{b}}\vec{v}$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ambos ortogonais a $\vec{v}$ ou $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

9-61 Em relação a uma base ortonormal, sabe-se que $\overrightarrow{AB} = (2,\sqrt{3},1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,\sqrt{3},1)$.

(a) Verifique que A, B e C são vértices de um triângulo.

(b) Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A e a área do triângulo ABC.

9-62 São dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos.

(a) Prove que $\text{proj}_{\vec{v}}\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

(b) Obtenha uma expressão para $\text{proj}_{\vec{u}}\text{proj}_{\vec{v}}\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

(c) Por analogia, tente generalizar os resultados dos itens (a) e (b) para n projeções sucessivas.

(d) Na treliça representada na Figura 9-9, a barra AB tem 20 metros de comprimento. Calcule a distância entre A e H.

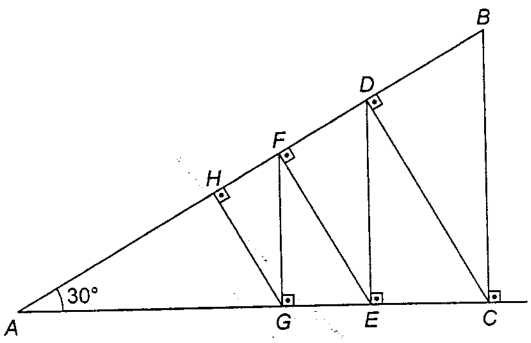


Figura 9-9

9-63 Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$, e $\vec{v}$ paralelo a $\vec{u}$. Se $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{x} = \vec{v}$, então, como já vimos, existe um único $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ tal que $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$. Prove a recíproca: se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$, então $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{x} = \vec{v}$. Conclua que o conjunto-solução da equação $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{x} = \vec{v}$ é formado pelos vetores $\vec{v} + \vec{w}$, em que $\vec{w}$ percorre o conjunto dos vetores ortogonais a $\vec{v}$ (Figura 9-10).

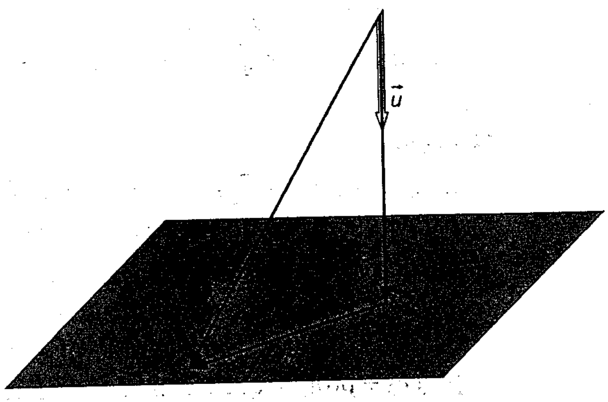


Figura 9-10