EXERCÍCIOS

6-1 Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Prove:

(a) P, A, B e C são coplanares $\Leftrightarrow$ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD (b) P, A e B são colineares $\Leftrightarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ é LD

6-2 Prove que, se $\vec{u}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$ $(\vec{u} = \lambda\vec{v})$, então qualquer seqüência que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é LD. Em particular, toda seqüência de vetores que contém o vetor nulo é LD.

6-3 A seqüência $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes (justifique sua resposta).

(a) Necessariamente, um dos vetores é nulo.

(b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{v}//\vec{w}$.

(c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são nulos, então dois deles são paralelos.

(d) Existem três planos paralelos e distintos, o primeiro contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{u}$, o segundo contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{v}$ e o terceiro contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{w}$.

6-4 Prove que:

(a) $(\vec{u},\vec{v})$ é LD $\Rightarrow$ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD

(b) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Rightarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ é LI

(c) $(\vec{u},\vec{v})$ é LD $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ é LD

6-5 Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

(a) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD $\Rightarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ é LD

(b) $(\vec{u},\vec{v})$ é LI $\Rightarrow$ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI

(c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são nulos, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD $\Rightarrow$ $(2\vec{u},-\vec{v})$ é LD.

(d) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Rightarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ é LD

(e) Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD, então $(\vec{u},\vec{v})$ tanto pode ser LD como LI.

(f) Se $(\vec{u},\vec{v})$ é LI, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ tanto pode ser LD como LI.

EXERCÍCIOS

6-8 Prove: $(\vec{u},\vec{v})$ é LI $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ é LI.

6-9 Prove:

(a) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w})$ é LI (b) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w},\vec{u}-\vec{v},3\vec{v})$ é LI

EXERCÍCIO

6-10 Demonstre: se $(\vec{v}_1,\vec{v}_2, \ldots ,\vec{v}_n)$ é tal que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \ldots + \beta_n\vec{v}_n$ vale somente se $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ ... $\alpha_n = \beta_n$, então $(\vec{v}_1,\vec{v}_2, \ldots ,\vec{v}_n)$ é LI (trata-se da recíproca do corolário anterior).

EXERCÍCIO

6-11 Determine a e b, sabendo que $(\vec{u},\vec{v})$ é LI e que $(a-1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a+b)\vec{v}$.

EXERCÍCIOS

~~**6-12** Explique por que a proposição anterior é válida também para $n \geq 4$.~~

6-13 Em cada caso, é descrita uma alteração efetuada na tripla LI $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Baseando-se na sua intuição, dê um palpite: a seqüência obtida após a alteração é também LI? Em seguida, tente provar que seu palpite está correto.

(a) Multiplica-se cada um dos três vetores por um escalar α.

(b) Substitui-se cada um dos três vetores pela soma dos outros dois.

(c) Soma-se a cada um dos três vetores um mesmo vetor $\vec{t}$.

(d) Somam-se a $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente, os vetores LI $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

6-14 Suponha que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja LI. Dado $\vec{t}$, existem α, β e γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (Proposição 6-8). Prove: $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

6-15 Prove:

(a) $(2\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} + \vec{w})$ é LI $\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w})$ é LI.

(b) $(2\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} + \vec{w})$ é LD $\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w})$ é LD.

6-14 *Exercício Resolvido*

No tetraedro $OABC$, determine m para que $X = O + m(\overrightarrow{OA}/3 - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}/2)$ pertença ao plano ABC (Figura 6-6).

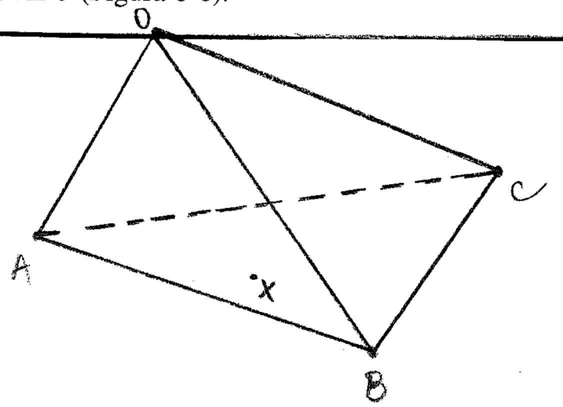

Figura 6-6.

EXERCÍCIO

6-16 No tetraedro $ABCD$, sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios de BD, CD e AC, e G o baricentro do triângulo MNP.

(a) Exprima $\overrightarrow{BG}$ como combinação linear de $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$.

(b) Calcule m para que o ponto $X = B + m\overrightarrow{BG}$ pertença ao plano da face ACD.

6-15 *Exercício Resolvido*

No triângulo ABC, M é o ponto médio de AB e N pertence ao lado AC (Figura 6-7 (a)). Sabendo que MN é paralelo a BC, prove que N é o ponto médio de AC.

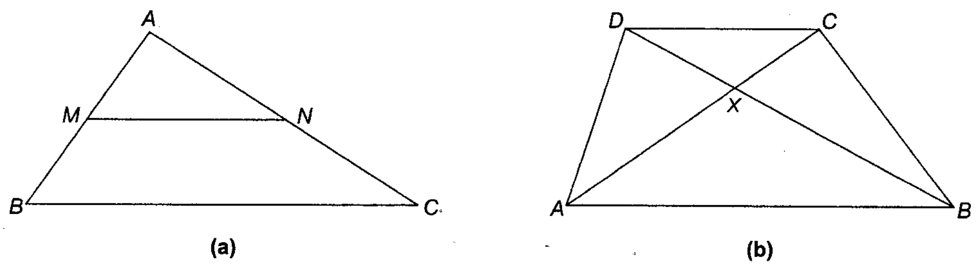

Figura 6-7

EXERCÍCIOS

6-17 No trapézio $ABCD$ da Figura 6-7 (b), o comprimento de AB é o dobro do comprimento de CD. Exprima $\overrightarrow{AX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$.

6-18 Sejam π um plano, e $\vec{u}$, $\vec{v}$, vetores LI paralelos a π. Mostre que todo vetor $\vec{w}$ paralelo a π pode ser escrito, de modo único, como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Capítulo 7 - Base

EXERCÍCIOS

7-9 Verifique se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI ou LD.

(a) $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (200,2,1)$, $\vec{w} = (300,1,2)$.

(b) $\vec{u} = (1,2,1)$, $\vec{v} = (1,-1,-7)$, $\vec{w} = (4,5,-4)$.

(c) $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (-3,4,1)$, $\vec{w} = (1,0,9)$.

(d) $\vec{u} = (7,6,1)$, $\vec{v} = (2,0,1)$, $\vec{w} = (1,-2,1)$.

7-10 Calcule m de modo que $\vec{u} = (1,2,2)$ seja gerado por $\vec{v} = (m-1,1,m-2)$, $\vec{w} = (m+1,m-1,2)$. Em seguida, determine m para que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja LD.

7-11 Em cada caso, calcule m para que os vetores sejam LD.

(a) $\vec{u} = (m,1,m)$, $\vec{v} = (1,m,1)$.

(b) $\vec{u} = (1-m^2,1-m,0)$, $\vec{v} = (m,m,m)$.

(c) $\vec{u} = (m,1,m+1)$, $\vec{v} = (1,2,m)$, $\vec{w} = (1,1,1)$.

(d) $\vec{u} = (m,1,m+1)$, $\vec{v} = (0,1,m)$, $\vec{w} = (0,m,2m)$.

7-12 No tetraedro $ABCD$, seja X um ponto tal que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XD}$. Determine os valores de m para os quais os vetores $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{BC}$ e $(1-m)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ sejam LD.

EXERCÍCIOS

7-13 Verifique se $(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ é base, sabendo que $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$, e que $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ é base.

7-14 Se $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ é base, prove que $(\alpha_1\vec{e}_1,\alpha_2\vec{e}_2,\alpha_3\vec{e}_3)$ é base se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 não são nulos. Interprete geometricamente.

7-15 Sejam E = $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base, $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{w} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$. Deduza uma condição necessária e suficiente sobre a, b e c para que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja base.

7-16 Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC. Explique por que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ é base e determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nessa base.

7-17 Sejam E = $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base, $\vec{u} = (1,2,-1)_E$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = m\vec{e}_1 + 2m\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

(a) Para que valores de m a tripla F = $(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ é base?

(b) Nas condições do item (a), calcule m para que $\vec{u} = (0,1,0)_F$.

7-18 Sejam E = $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = m\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

(a) Para que valores de m a tripla F = $(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ é base?

(b) Nas condições do item (a), calcule a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (1,1,1)_E$ e $\vec{v} = (2,a,b)_F$ sejam LD.

7-19 Sejam E = $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base, $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = 3\vec{e}_3$.

(a) Mostre que F = $(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ é base.

(b) Calcule m para que $(0,m,1)_E$ e $(0,1,-1)_F$ sejam LD.

Capítulo 8 - Mudança de Base

EXERCÍCIOS

8-3 Escreva a matriz de mudança da base $E = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ para a base $F = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ e exprima o vetor $\vec{u} = -4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3$ em função de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, sabendo que $\vec{f}_1 = (-3,1,1)_E$, $\vec{f}_2 = (1,-2,1)_E$ e $\vec{f}_3 = (1,2,0)_E$.

8-4 Repita o exercício anterior, supondo agora que $\vec{f}_1 = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$, $\vec{f}_3 = 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$ e $\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1$.

8-5 Se $E = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base, que condições deve satisfazer m para que $F = (\vec{u} + \vec{v}, m\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} + m\vec{w})$ seja base? Escreva a matriz de mudança de E para F.

EXERCÍCIOS

8-6 Sejam $E = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ duas bases tais que $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 7\vec{e}_3$. Exprima o vetor $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ na base F.

8-7 Sejam $E = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ uma base e $F = (\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u})$. Mostre que F é base e calcule a tripla de coordenadas do vetor $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ na base F.

8-8 Sejam $E = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ uma base e $F = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ tais que $\vec{u} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c}$. Prove que F é base e verifique se $(\vec{x},\vec{y})$ é LI ou LD, nos casos:

(a) $\vec{x} = (2,2,0)_F$, $\vec{y} = (-4,0,-2)_E$.

(b) $\vec{x} = (1,0,2)_F$, $\vec{y} = (11/15,2/3,-4/5)_E$.

EXERCÍCIOS

8-9 Seja $E = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ uma base. Verifique se existe uma base $F = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ tal que $\vec{a} = (-1,0,1)_E$, $\vec{b} = (1,2,-2)_E$, $\vec{c} = (1/2,1,1/2)_E$. Caso exista, exprima os vetores de E em termos dos vetores de F.

8-10 Sejam $E = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ e $G = (\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$ três bases. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes e justifique sua resposta.

(a) $M_{EF} = M_{EG} \Rightarrow F = G$

(b) $M_{EF} = M_{GF} \Rightarrow E = G$

(c) $M_{EF} = I_3 \Rightarrow E = F$

(d) $M_{EF} = M_{FE} \Rightarrow E = F$

8-11 Seja O o ponto de encontro das diagonais do paralelepípedo $ABCDPQRS$ da Figura 8-1.

(a) Determine a matriz de mudança da base $E = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP})$ para a base $F = (\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OR})$.

(b) Seja M o ponto médio da aresta AD. Calcule a tripla de coordenadas de $\overrightarrow{OM}$ na base F.

(c) Mostre que todo vetor que tem as três coordenadas iguais relativamente à base F é gerado por $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AS}$.

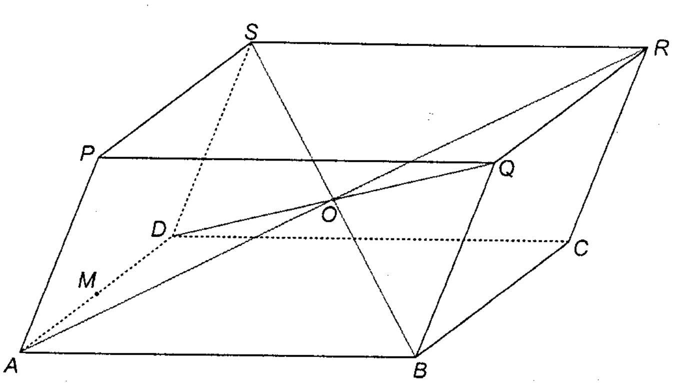

Figura 8-1

EXERCÍCIO

8-12 Sejam $E = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ e $G = (\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$ bases tais que

$$2\vec{e}_1 = \sqrt{3}\vec{f}_1 - \vec{f}_3 \qquad \vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$2\vec{e}_2 = \vec{f}_1 + \sqrt{3}\vec{f}_3 \qquad \vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_3 = \vec{f}_2 \qquad \vec{g}_3 = \vec{e}_1$$

Escreva todas as matrizes de mudança de base envolvendo E, F e G.