Capítulo 1 — Vetor

EXERCÍCIOS

1-10 Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

(a) $(A,B) \in \overrightarrow{AB}$

(b) $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(c) $AB//CD \Rightarrow \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$

(d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow A = C$ e $B = D$

1-11 Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (A,C) \sim (B,D)$

(b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AC \cap BD = \varnothing$

(c) $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{CD}|| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow ||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{CD}||$

(e) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então existe um único plano contendo A, B, C e D.

(f) $(A,B) \sim (C,D) \Rightarrow ||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{CD}||$

Capítulo 2 — Soma de Vetores

EXERCÍCIOS

2-2 Prove que, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

2-3 Prove:

(a) $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$

(b) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$

2-4 Prove que $\vec{u} + \vec{z} = \vec{u} \Rightarrow \vec{z} = \vec{0}$ e que $\vec{u} + \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{z} = -\vec{u}$. Essas propriedades asseguram a unicidade do elemento neutro e a do elemento oposto (Proposição 2-2).

2-5 Prove que o oposto de $\vec{u} + \vec{v}$ é $-\vec{u} - \vec{v}$.

2-6 Você dispõe de uma folha de papel circular, de centro O. Verifique se existem pontos A e B na borda da folha tais que não seja possível desenhar representantes de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ (entenda "desenhar representante" como desenhar a flecha correspondente).

2-7 ***Exercício Resolvido***

Na Figura 2-7 representa-se um paralelepípedo $ABCDEFGH$. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{EC}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

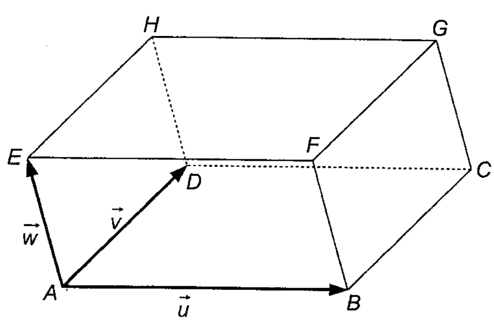

Figura 2-7

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$

$= \vec{u} + \vec{w} + \vec{v}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} =$

$= \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

Resolução

- A estratégia é "ir de A até G" através de arestas associadas a $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

- Adotando estratégia semelhante, escrevemos

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$$

EXERCÍCIOS

2-7 No Exercício Resolvido 2-7, exprima $\overrightarrow{HB}$ e $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

2-8 (a) Justifique a seguinte regra para determinar o vetor $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$: tomam-se representantes consecutivos, isto é, a origem de cada um coincidindo com a extremidade do anterior, e "fecha-se o polígono".

(b) Mostre que a regra do item (a) vale para quatro e para cinco parcelas (é possível demonstrá-la para um número qualquer de parcelas usando o Princípio de Indução Finita).

(c) Determine a soma dos vetores indicados em cada caso da Figura 2-8.

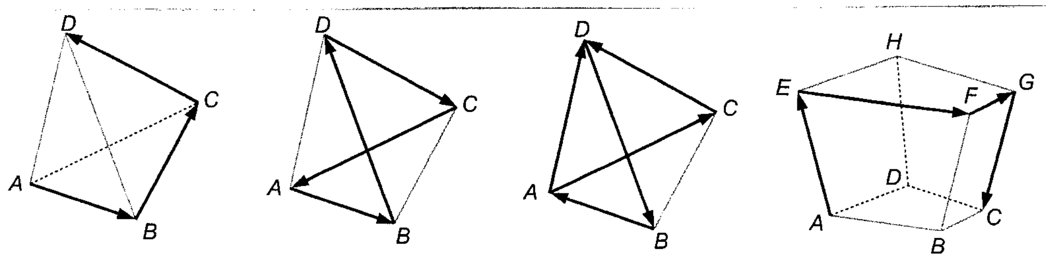

Figura 2-8

2-9 Obtenha a soma dos vetores indicados em cada caso da Figura 2-9.

(a) *ABCDEFGH* é um paralelepípedo.

(b) *ABCDEFGH* e *EFGHIJLM* são cubos de arestas congruentes.

(c) O cubo *ABCDEFGH* tem centro *O* e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces.

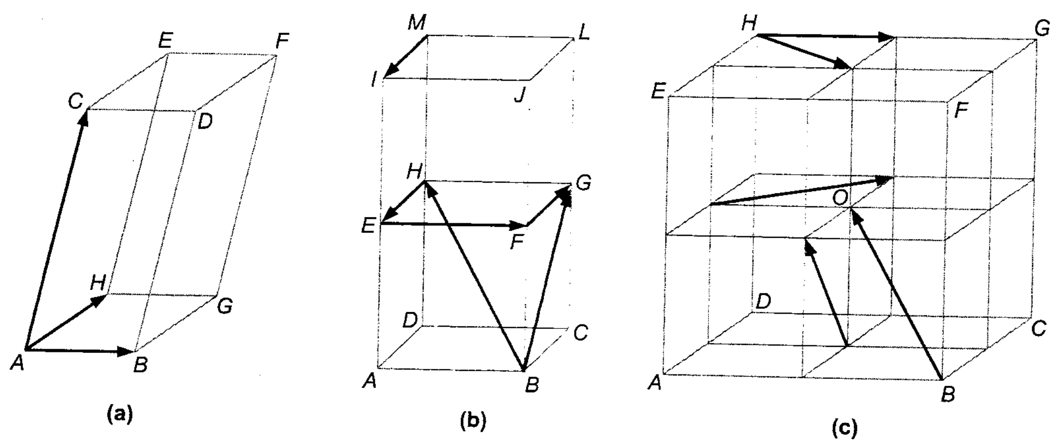

Figura 2-9

2-10 Utilize o paralelepípedo da Figura 2-9 (a) para determinar o vetor $\vec{x}$ em cada caso:

(a) $\vec{x} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$

(b) $\vec{x} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BE}$

(c) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$

2-11 Na Figura 2-10, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.

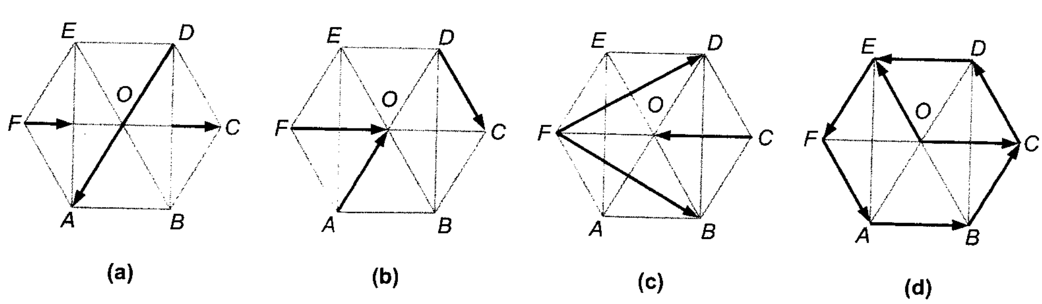

Figura 2-10

2-12 Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

2-13 Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$? Você não vai precisar de nenhuma figura para chegar à resposta certa.

2-14 Na Figura 2-9 (a), sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Obtenha representantes dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tais que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$ e $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{y} = \vec{0}$. Quais das propriedades estudadas até aqui você utilizou?

Capítulo 3 - Produto por nº Real

CIOS

3-1 Mostre que, se $\vec{v}$ é um vetor não-nulo, então $\vec{v}$ e seu versor são paralelos, de mesmo sentido, e que o versor de $\vec{v}$ é unitário (isto é, tem norma 1).

3-2 Dado $\vec{u}$ não-nulo, obtenha $\vec{v}$ de norma 6 tal que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos e de mesmo sentido.

3-3 Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na Figura 3-2, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + 5\vec{w}/4$ por uma flecha de origem O.

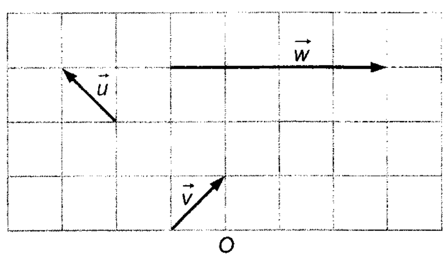

Figura 3-2

3-4 Na Figura 3-3 (a) representa-se um hexágono regular *ABCDEF*. Determine *X*, sabendo que $\overrightarrow{CX} = -3\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}/2$.

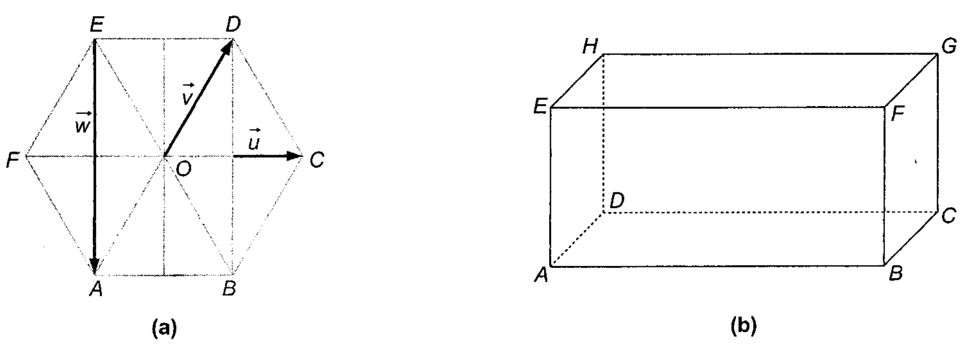

Figura 3-3

3-5 Na Figura 3-3 (b) está representado um paralelepípedo. Sendo *M* tal que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BG}/2$, indique a ponta da flecha de origem *H* que corresponde ao vetor $\overrightarrow{HB}/2 + \overrightarrow{AB}/3 - \overrightarrow{CD}/6$.

3-6 O hexágono *ABCDEF* é regular, de centro *O*. Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

3-8 Prove a recíproca da afirmação feita na Definição 3-1 (a): $\alpha\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0})$.

3-9 Prove que, se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

3-10 Resolva, na incógnita $\vec{x}$, a equação $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$.

3-11 Resolva os sistemas nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

(a) $\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{u} - 2\vec{v} \\ \vec{x} - \vec{y} = 3\vec{u} \end{cases}$

3-12 Métodos para resolver sistemas lineares tais como a Regra de Cramer e o escalonamento valem para sistemas lineares vetoriais. Utilize-os para resolver o sistema nas incógnitas $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} = \vec{u} - \vec{v} \\ -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0} \end{cases}$$

Capítulo 4 - Soma de ponto e vetor

4-4 Prove que $(A + \vec{u}) - \vec{u} = A$.

4-5 Prove que $(A - \vec{u}) + \vec{v} = A - (\vec{u} - \vec{v})$.

4-6 Prove que $A + \vec{u} = B + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$.

4-7 Determine $\overrightarrow{BA}$ em função de $\vec{u}$, sabendo que $A - \vec{u} = B + \vec{u}$.

4-8 Determine a relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A$.

4-9 Prove que $[A + (\vec{u} + \vec{v})] + \vec{w} = (A + \vec{u}) + (\vec{v} + \vec{w})$.

4-10 Dados os pontos A, B e C, determine X, sabendo que $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$.

4-11 Prove que, se $B = A + \overrightarrow{DC}$, então $B = C + \overrightarrow{DA}$.

4-12 Dados os pontos distintos A e B, seja $X = A + \alpha\overrightarrow{AB}$. Em cada um dos casos, descreva o conjunto dos valores que α deve tomar para que X percorra todo o conjunto especificado.

(a) O segmento AB.
(b) A semi-reta de origem A que contém B.
(c) A semi-reta de origem B que contém A.
(d) A reta AB.
(e) O segmento CB, que tem A como ponto médio.

4-13 **Baricentro** dos pontos A_1, A_2, A_3 é, por definição, o ponto G que verifica $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} = \vec{0}$. Prove que, dado um ponto O qualquer, $G = O + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})/3$. Estenda o conceito e o resultado para n pontos. Compare com o Exercício 3-17. Examine o caso particular de dois pontos.