

1. Dada as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Resolver a equação $3X - 2A = B + 5X$

(b) Resolver o sistema de equações $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 5X - 6Y = B \end{cases}$

2. Dada as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular AB e BA

(b) Calcular $2A - 3B^t$

(c) Calcular $(A + B^t)(A^t - B)$

3. Provar que se A e B comutam (isto é, $AB = BA$), então

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(c) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

(d) $(A - B)(A^2 + 2AB + B^2) = A^3 - B^3$

4. Achar uma matriz não nula A tal que $A^2 = 0$.

5. Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se $A^t = A$; anti-simétrica se $A^t = -A$. Provar que se A e B são simétricas (anti-simétricas), então $A + B$ e λA também o são.

6. Dada uma matriz quadrada M , provar que a matriz $S = M + M^t$ é simétrica e a matriz $A = M - M^t$ é anti-simétrica. Provar que toda matriz pode ser decomposta na soma de uma simétrica com uma anti-simétrica.

7. Qual a relação entre

(a) $\det A$ e $\det A^t$?

(b) $\det A$, $\det B$ e $\det AB$?

8. Provar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

9. Uma matriz M diz-se ortogonal se $MM^t = I$. Provar então que $M^tM = I$. Provar que o determinante de uma matriz ortogonal é 1 ou -1 . Provar que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

10. Provar que, se $A^3 = 0$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

11. Qual a condição para que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$ seja inversível? Achar a inversa.

12. Resolver o sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$