

Sexta Lista de Exercícios de SMA301 - Cálculo I :

Variação de funções (gráficos), Regras de L'Hôpital, Polinômios de Taylor, Integrais impróprias.

(1) Exercícios do Capítulo 9 do livro de Cálculo 1 do Guidorizzi (volume 1, quinta edição).

Note que não é sempre necessário fazer todos os itens de cada um dos conjuntos de exercícios deste capítulo. Cada estudante deve desenvolver a habilidade de distinguir quais exercícios são mais importantes. Via de regra, após ler uma questão, o estudante deve se perguntar se aquele problema é muito fácil, ou muito similar a um outro já resolvido e, caso afirmativo, pode ignorá-lo. São os exercícios desafiadores, isto é, aqueles ainda não familiares, ou com grau de dificuldade superior, que devem merecer maior atenção por parte do estudante.

(2) Os seguintes exercícios do Capítulo 16 do livro de Cálculo 1 do Guidorizzi (volume 1, quinta edição): Exercício 1 do conjunto de exercícios 16.1 (pg 469), Exercícios 1 e 7 do conjunto de exercícios 16.2 (pg 479), Exercícios 1, 7, 8, 9, 10 e 11 do conjunto de exercícios 16.3 (pgs 488-490).

Note que há um exemplar do livro disponível para consulta na biblioteca do ICMC (ou seja, este exemplar não pode ser emprestado e, portanto, está sempre lá. Quem não tiver acesso a um exemplar do livro por outros meios, pode tirar cópia dos exercícios a partir do exemplar disponível na biblioteca do ICMC. Por outro lado, exercícios similares aos do livro do Guidorizzi são encontrados em quase todos os livros de Cálculo 1. Quem preferir, pode estudar pelos exercícios de um outro livro qualquer, desde que estes cubram toda a matéria e sejam suficientemente desafiadores.

(3) Lembra-se que, para $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a *integral imprópria do primeiro tipo* como

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b f(x)dx \right\}$$

com definição análoga para $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, quando $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$, que generaliza para $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$, quando $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lembra-se também que, para $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a *integral imprópria do segundo tipo* como

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{u \rightarrow a^+} \left\{ \int_u^b f(x)dx \right\}$$

com definição análoga para quando $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, que generaliza para quando $f : [a, b) \cup (b, c] \rightarrow \mathbb{R}$.

Em ambos os casos, é fácil determinar a convergência ou até mesmo o valor destas integrais se soubermos uma primitiva F para f , usando o teorema fundamental do cálculo. (Dizemos que uma integral imprópria converge se pudermos garantir que o valor desta integral existe e é um número finito, mesmo que não saibamos calculá-lo, ao passo que uma integral não convergente é dita divergente).

(3.1) Calcule:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx \quad (k > 1) & \text{(b)} \int_0^\infty e^{-sx} dx \quad (s > 0) & \text{(c)} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{(d)} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx \\ \text{(e)} \int_0^\infty x e^{-sx} dx \quad (s > 0) & \text{(f)} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + s^2} & \text{(g)} \int_2^\infty \frac{1}{x-1} dx & \text{(h)} \int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx \\ \text{(i)} \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx & \text{(j)} \int_1^\infty \frac{1}{x+x^3} dx & & \end{array}$$

(3.2) Sejam, $s > 0$, $\alpha \neq 0$, calcule

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-sx} \operatorname{sen} \alpha x \, dx \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos \alpha x \, dx$$

(3.3) Calcule:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (c) \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx \quad (d) \int_0^1 \log x \, dx$$

$$(e) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (f) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \quad (g) \int_{-1}^2 \frac{1}{4-x^2} dx \quad (h) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

Por outro lado, se não soubermos uma primitiva para f , existem alguns *critérios de convergência*:

(i) Se $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge, então $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge (a recíproca não vale, em geral).

(ii) (Critério da comparação). Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, \infty)$, e $\int_a^{\infty} g(x) dx = K \neq \infty$, então $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

(iii) (Critério do limite). Sejam $0 \leq f(x)$ e $0 \leq g(x)$, $\forall x \in [a, \infty)$, e tais que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = L \neq \infty$.

Se $L \neq 0$, então $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge se e somente se $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge.

Se $L = 0$, então $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge se $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge.

(Com versões análogas destes critérios para integrais impróprias do segundo tipo).

Usamos um ou mais destes critérios para determinar a convergência de $\int_a^{\infty} f(x) dx$ quando já sabemos que $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge, ou quando sabemos uma primitiva G para g e podemos determinar que $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge usando o teorema fundamental do cálculo.

(3.4) Portanto, usando os critérios acima, determine a convergência ou divergência de:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \quad (b) \int_1^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^5 + 3x + 1} dx \quad (d) \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 2x + 1}} dx$$

$$(e) \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad (f) \int_1^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^3} dx \quad (g) \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \quad (h) \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx$$

$$(i) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} \, dx \quad (j) \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2 \log(x+1)} dx \quad (k) \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx \quad (l) \int_{10}^{\infty} \frac{x^5-3}{\sqrt{x^{20}+x^{10}-1}} dx$$