Sexta lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II - Integrais Múltiplas

1. Encontre o valor da integral iterada nos seguintes casos:

$$(a) \int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx \quad (b) \int_0^4 \int_0^y dxdy \qquad (c) \int_0^1 \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} dxdy$$

$$(d) \int_{-1}^1 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{xy} dydx \quad (e) \int_0^1 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}} dxdy \quad (f) \int_0^\pi \int_0^{y^2} \sin\frac{x}{y} dxdy$$

2. Dado $\int_2^4 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, caracterizar D.

3. Inverta ordem de integração para cada um dos problemas abaixo.

$$(a) \int_1^0 \int_0^x f(x,y)dy\,dx \quad (b) \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x,y)dydx \qquad (c) \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

$$(d) \int_1^{\mathrm{e}} \int_{\ln x}^x f(x,y)dydx \quad (e) \int_0^1 \int_y^{y+3} f(x,y)dxdy \quad (f) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$$

$$(g) \int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)dydx \quad (h) \int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x,y)dydx \quad (i) \int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x,y)dydx$$

4. Calcule, utilizando integral dupla, a área da região compreendida entre:
   (a) o gráfico das funções $y = x$ e $y = -x^2 + x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$.
   (b) o gráfico das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi/2$.
   (c) o gráfico das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \leq x \leq 1$.

5. Calcule o volume do conjunto dado.
   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + 2y\}$.
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$.
   (c) $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$.
   (d) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x + y + 2 \leq z \leq 4$.
   (e) $0 \leq y \leq 1 - x^2$ e $0 \leq z \leq 1 - x^2$.
   (f) $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $y^2 + z^2 \leq a^2$ (a¿0).

6. Determinar a área da região limitada pela parábola $x - y = (x+y)^2 + 1$ e pela reta $x - y = 4$. Sugestão: Faça $u = x - y$ e $v = x + y$.

7. Calcular $\iint_D (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\,dx\,dy$, onde D é o paralelogramo de vértices: $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$. Sugestão: Usar a transformação: $u = x - y$ e $v = x + y$.

8. Determinar a área do anel dado por dois círculos concêntricos de raios a e b, $b > a$.

9. Achar o volume do sólido S, limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ e pelo plano $z = 0$.

10. Determinar o volume V do sólido constituído pelo cone $(z-3)^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, e pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $2 \leq z \leq 5$.

11. Determinar o volume interno ao cilindro $x^2+y^2=9$, $0 \leq z \leq 6$, e externo ao cone $x^2+y^2=z^2/9$, $z \geq 0$.

12. Considere a integral $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ onde D é o sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2 \leq z$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2$, $z \geq 0$. Determine os extremos de integração, e escreva as integrais iteradas usando:

    (a) coordenadas cartesianas; (b) coordenadas cilíndricas; (c) coordenadas esféricas.

    Calcule esta integral usando o sistema de coordenadas que achar mais conveniente.

13. Calcule o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2 \leq 9$, $3 \leq z \leq 6$, $x^2+y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 3$ e $x^2+y^2 \geq 1$. Sugestão: usar coordenadas cilíndricas.

14. Calcular o volume do sólido constituído pelo cilindro $x^2+y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$, e pelo cone $x^2+y^2 \leq z^2$, $2 \leq z \leq 5$.

15. Seja R a região limitada pelo parabolóide $z = 2x^2+y^2+1$, pelo plano $x+y=1$ e pelos planos coordenados. Calcule o volume de R.

16. Calcule as integrais abaixo usando a sistema de coordenadas mais conveniente:

    (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\,dz$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$

17. Uma lâmina plana é limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $x = 4$. Ache o centro de massa, sabendo-se que a densidade no ponto $P = (x, y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao eixo y.

18. Encontre o momento de inércia de uma placa semi-circular de raio a, sabendo-se que a densidade em $P = (x, y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao diâmetro da placa.

19. Calcule I_x, I_y e I_0 para a lâmina que tem a forma da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$ e cuja densidade é $\delta(x, y) = y^2$.

20. Uma lâmina homogênea tem a forma de um quadrado de lado a. Determine o momento de inércia em relação a:

    (a) um lado;

    (b) uma diagonal;

    (c) o centro de massa.

21. Calcule a área acima do plano xy da superfície do cone $z^2 = x^2+y^2$ cortada pelo cilindro $x^2+y^2 = 2ax$.

22. Calcule a área da figura cortada do plano $x+y+z=7$ pelo cilindro $x^2+y^2=a^2$.

23. Calcule a área da superfície da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2+y^2=ax$.

24. Calcule a área da parte da superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$ compreendida entre os planos $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ e $y=0$.

Exercícios extras - Livro do Stewart, Cálculo II (quarta edição), capítulo 15

Seção 15.2 pg 980: Exs.: 7,9,11,15,17,36b

Seção 15.3 pg 988: Exs.: 11,13,28,40,43,46

Seção 15.4 pg 994: Exs.: 9,11,15,17,20,25,27,29

Seção 15.5 pg 1004: Exs.: 7,9,15,17

Seção 15.6 pg 1008: Exs.: 7,9,11,22

Seção 15.7 pg 1016: Exs.: 9,11,15,33

Seção 15.8 pg 1023: Exs.: 8,11,22,26,29

Seção 15.9 pg 1033: Exs.: 11,13,15,17,19,21,23