Sexta lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II - Integrais Múltiplas

1. Encontre o valor da integral iterada nos seguintes casos:

$$(a)\ \int_1^2\int_0^{2x} xy^3dydx \quad (b)\ \int_0^4\int_0^y dxdy \qquad (c)\ \int_0^1\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}dxdy$$

$$(d)\ \int_{-1}^1\int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{xy}dydx \quad (e)\ \int_0^1\int_{y^2}^{y}\sqrt{\frac{y}{x}}dxdy \quad (f)\ \int_0^\pi\int_0^{y^2}\sin\frac{x}{y}dxdy$$

2. Dado $\displaystyle\int_2^4 dy\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, caracterizar D.

3. Inverta ordem de integração para cada um dos problemas abaixo.

$$(a)\ \int_1^0\int_0^x f(x,y)dy\,dx \quad (b)\ \int_0^1\int_{x^2}^x f(x,y)dydx \qquad (c)\ \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

$$(d)\ \int_1^{\mathrm{e}}\int_{\ln x}^x f(x,y)dydx \quad (e)\ \int_0^1\int_y^{y+3} f(x,y)dxdy \quad (f)\ \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$$

$$(g)\ \int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)dydx \quad (h)\ \int_0^\pi\int_0^{\sin x} f(x,y)dydx \quad (i)\ \int_0^1\int_{2x}^{x+1} f(x,y)dydx$$

4. Calcule, utilizando integral dupla, a área da região compreendida entre:
   (a) o gráfico das funções $y = x$ e $y = -x^2 + x + 1$, com $-1 \le x \le 1$.
   (b) o gráfico das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \le x \le \pi/2$.
   (c) o gráfico das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \le x \le 1$.

5. Calcule o volume do conjunto dado.
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le x + 2y\}$.
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 0 \le z \le \sqrt{xy}\}$.
   (c) $x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0$ e $z \ge 0$.
   (d) $x^2 + y^2 \le 1$ e $x + y + 2 \le z \le 4$.
   (e) $0 \le y \le 1 - x^2$ e $0 \le z \le 1 - x^2$.
   (f) $x^2 + y^2 \le a^2$ e $y^2 + z^2 \le a^2$ (a¿0).

6. Determinar a área da região limitada pela parábola $x - y = (x + y)^2 + 1$ e pela reta $x - y = 4$. Sugestão: Faça $u = x - y$ e $v = x + y$.

7. Calcular $\displaystyle\iint_D (x - y)^2\operatorname{sen}^2(x + y)\,dx\,dy$, onde D é o paralelogramo de vértices: $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$. Sugestão: Usar a transformação: $u = x - y$ e $v = x + y$.

8. Determinar a área do anel dado por dois círculos concêntricos de raios a e b, $b > a$.

9. Achar o volume do sólido S, limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ e pelo plano $z = 0$.

10. Determinar o volume V do sólido constituído pelo cone $(z - 3)^2 \ge x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$, e pelo cilindro $x^2 + y^2 \le 1$, $2 \le z \le 5$.

11. Determinar o volume interno ao cilindro $x^2+y^2=9$, $0\leq z\leq 6$, e externo ao cone $x^2+y^2=z^2/9$, $z\geq 0$.

12. Considere a integral $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ onde D é o sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2\leq z$, $x^2+y^2+z^2\leq 2$, $z\geq 0$. Determine os extremos de integração, e escreva as integrais iteradas usando:

    (a) coordenadas cartesianas; (b) coordenadas cilíndricas; (c) coordenadas esféricas.

    Calcule esta integral usando o sistema de coordenadas que achar mais conveniente.

13. Calcule o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2\leq 9$, $3\leq z\leq 6$, $x^2+y^2\leq z^2$, $0\leq z\leq 3$ e $x^2+y^2\geq 1$. Sugestão: usar coordenadas cilíndricas.

14. Calcular o volume do sólido constituído pelo cilindro $x^2+y^2\leq 4$, $0\leq z\leq 2$, e pelo cone $x^2+y^2\leq z^2$, $2\leq z\leq 5$.

15. Seja R a região limitada pelo parabolóide $z=2x^2+y^2+1$, pelo plano $x+y=1$ e pelos planos coordenados. Calcule o volume de R.

16. Calcule as integrais abaixo usando a sistema de coordenadas mais conveniente:

    (a) $\displaystyle\int_0^4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\,dz$

    (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z^2\,dz\,dy\,dx$

17. Uma lâmina plana é limitada pelos gráficos de $y=x^2$ e $x=4$. Ache o centro de massa, sabendo-se que a densidade no ponto $P=(x,y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao eixo y.

18. Encontre o momento de inércia de uma placa semi-circular de raio a, sabendo-se que a densidade em $P=(x,y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao diâmetro da placa.

19. Calcule I_x, I_y e I_0 para a lâmina que tem a forma da região limitada pelos gráficos de $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $y=0$ e cuja densidade é $\delta(x,y)=y^2$.

20. Uma lâmina homogênea tem a forma de um quadrado de lado a. Determine o momento de inércia em relação a:

    (a) um lado;

    (b) uma diagonal;

    (c) o centro de massa.

21. Calcule a área acima do plano xy da superfície do cone $z^2=x^2+y^2$ cortada pelo cilindro $x^2+y^2=2ax$.

22. Calcule a área da figura cortada do plano $x+y+z=7$ pelo cilindro $x^2+y^2=a^2$.

23. Calcule a área da superfície da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2+y^2=ax$.

24. Calcule a área da parte da superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$ compreendida entre os planos $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ e $y=0$.

Exercícios extras - Livro do Stewart, Cálculo II (quarta edição), capítulo 15

Seção 15.2 pg 980: Exs.: 7,9,11,15,17,36b

Seção 15.3 pg 988: Exs.: 11,13,28,40,43,46

Seção 15.4 pg 994: Exs.: 9,11,15,17,20,25,27,29

Seção 15.5 pg 1004: Exs.: 7,9,15,17

Seção 15.6 pg 1008: Exs.: 7,9,11,22

Seção 15.7 pg 1016: Exs.: 9,11,15,33

Seção 15.8 pg 1023: Exs.: 8,11,22,26,29

Seção 15.9 pg 1033: Exs.: 11,13,15,17,19,21,23