1^a Lista de Exercícios de Cálculo II - Curvas e Funções Vetoriais

1. Desenhe a imagem:
   a) $F(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbb{R}$
   b) $F(t) = (1, 1, t),\ t \geq 0$
   c) $F(t) = (t, t, 1),\ t \geq 0$
   d) $F(t) = (cost, sent, 2)$
   e) $F(t) = (t, t, 1 + sent),\ t \geq 0$
   f) $F(t) = \left(1, 1, \dfrac{1}{t}\right),\ t > 0$
   g) $F(t) = (cost, sent, e^{-t}),\ t \geq 0$
   h) $F(t) = (1 + sent, 1 + sent, cost),\ -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$
   i) $F(t) = (e^t cost, e^t sent),\ t \geq 0$

2. Sejam $\overrightarrow{F}$(t)=(t, sent, 2) e $\overrightarrow{G}$(t)=(3, t, t^2). Calcule:
   a) $\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)$
   b) $e^{-t}.\overrightarrow{F}(t)$
   c) $\overrightarrow{F}(t) - 2\overrightarrow{G}(t)$
   d) $\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t)$

3. Calcule $\dfrac{d\overrightarrow{F}}{dt}$ e $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}$:
   a) $\overrightarrow{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, ln(t^2 + 1))$
   b) $\overrightarrow{F}(t) = \sqrt[3]{t^2}\ \overrightarrow{i} + cost^2\overrightarrow{j} + 3t\overrightarrow{k}$
   c) $\overrightarrow{F}(t) = sen5t\overrightarrow{i} + cos4t\overrightarrow{j} - e^{-2t}\overrightarrow{k}$

4. Calcule:
   a) $\int_0^1\ [t\overrightarrow{i} + e^t\overrightarrow{t}]dt$
   b) $\int_{-1}^1 \left[sen3t\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{1+t^2}\overrightarrow{t} + \overrightarrow{k}\right] dt$
   c) $\int_1^2 [3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{t} + \overrightarrow{k}]dt$

5. Sejam $\overrightarrow{F}(t) = t\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + e^t\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Calcule:
   a) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t)]dt$
   b) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)]dt$

6. Ache o comprimento da curva C, determinada por $r(t)$, em cada um dos itens abaixo:

   a) $r(t) = (5t, 4t^2, 3t^2)$, $0 \leq t \leq 2$
   b) $r(t) = (t^2, t\sin(t), t\cos(t))$, $0 \leq t \leq 1$
   c) $r(t) = (2t, 4\sin(3t), 4\cos(3t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$
   d) $r(t) = (1 - t^2, 4t, 3 + 2t^2)$, $0 \leq t \leq 2$
   e) $r(t) = (e^t, t\sin(t), t\cos(t))$, $0 \leq t \leq 1$
   f) $r(t) = (3t^2, t^3, 6t)$, $0 \leq t \leq 1$
   g) $r(t) = (cost, sent, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 2\pi$
   h) $r(t) = (e^{-t}cost, e^{-t}sent, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$

7. Seja $\overrightarrow{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Prove que existe $M > 0$ tal que $\| \overrightarrow{F}(t) \| \leq M$ em $[a, b]$.

8. Seja $\overrightarrow{F}: I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a segunda ordem em I. Suponha que exista um número real λ tal que, para todo t em I, $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}(t)}{dt^2} = \lambda \overrightarrow{F}(t)$. Prove que $\overrightarrow{F}(t) \times \dfrac{d\overrightarrow{F}(t)}{dt}$ é constante em I.

9. Seja $\overrightarrow{r}$ definida em $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e derivável até a segunda ordem. Prove que se $\overrightarrow{r}(t) \times \dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}$ for constante em $\mathbb{R}$, então $\overrightarrow{r}(t) \times \dfrac{d^2\overrightarrow{r}(t)}{dt^2} = \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}$.

10. Dê exemplos de curvas γ e δ tais que $Im\gamma = Im\delta$, mas que seus comprimentos de curvas sejam diferentes.

11. Dizemos que uma curva $\delta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, com derivada contínua, está parametrizada pelo comprimento de arco se $\| \delta^{'}(s) \| = 1$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco. Interprete o parâmetro s.

    a) $\delta(s) = (cos(s), sen(s))$, $s \geq 0$

    b) $\delta(s) = \left(Rcos(\dfrac{s}{R}), Rsen(\dfrac{s}{R})\right)$, $s \geq 0$, onde $R > 0$ é um real fixo

    c) $\delta(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{5}}, \dfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)$, $s \geq 0$

12. Um ponto move-se sobre uma curva C de modo que o vetor posição $r(t)$ e o vetor tangente $r'(t)$ sejam ortogonais. Mostre que C está sobre uma esfera de centro na origem. (sugestão: mostre que $|r(t)|^2 = 0$, para todo t.)

13. Uma *hélice* é uma curva cuja tangente faz ângulo constante com um vetor uniário $\vec{u}$. Mostre que a curva $C : r(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma hélice, determinando um vetor apropriado $\vec{u}$.

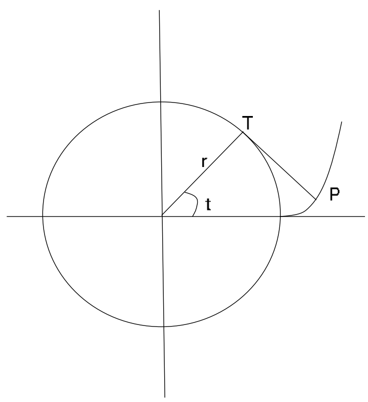
14. Encontre as equações paramétricas da reta tangente a C em P, nos seguintes casos:

    a) $C : r(t) = (2t^3 - 1, -5t^2 + 3, 8t + 2)$, $P = (1, -2, 10)$ *b)* $C : r(t) = (e^t, te^t, t^2 + 4)$, $P = (1, 0, 4)$
    c) $C : r(t) = (e^t, t\sin(t), t\cos(t))$, $P = (1, 0, 0)$ *f)* $C : r(t) = (3t^2, t^3, 6t)$, $P = (3, 1, 6)$

15. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto p no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$ e se o parâmetro t for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são

$$x = r(\cos(\theta) + \theta\sin(\theta)), y = r(\sin(\theta) - \theta\cos(\theta)).$$

Aproveite e calcule a curvatura da involuta.



16. Se uma curva C tem vetor tangente $\vec{u}$ em um ponto $P \in C$, então o *plano normal* a C em P é o plano que passa por P normal ao vetor $\vec{u}$. Encontre a equação do plano normal à curva C no ponto P nos seguintes casos:

    a) $C : r(t) = (e^t, te^t, t^2+4)$, $P = (1, 0, 4)$ *b)* $C : r(t) = (t\sin(t), t\cos(t), t)$, $P = (\pi/2, 0, \pi/2)$
    c) $C : r(t) = (e^t, t\sin(t), t\cos(t))$, $P = (1, 0, 0)$

17. Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical. Então use uma análise do intervalos nos quais a curva sobe e desce.

    (a) $x = t(t^2-3)$, $y = 3(t^2-3)$
    (b) $x = t^3 - 3t^2$, $y = t^3 - 3t$
    (c) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$
    (d) $x = a(\cos(\theta) - \cos^2(\theta))$, $y = a(\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta))$

18. Seja a curva dada em forma paramétrica por: $x = \cos t \cos 2t$, $y = \text{sen} t \cos 2t$
    Calcule a área dentro da curva fechada definida acima para $t \in [\pi/4, 3\pi/4]$

19. Calcule os comprimentos das curvas dadas em forma paramétrica por:

    (a) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \text{sen} t$, para $t \in [0, \pi]$
    (b) $x = t\cos t$, $y = t\text{sen} t$, para $t \in [0, \pi]$

20. Desenhe a curva dada em coordenadas polares (r, θ) por:
    (a) $r = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$ (b) $r = \cos 3\theta$

21. Resolva os exercícios (18) e (19) usando coordenadas polares.

22. Calcule as áreas das curvas fechadas dadas em coordenadas polares (r, θ) por:
    (a) $r = 1 - \cos\theta$ (b) $r = \cos 3\theta$

23. Calcule as áreas entre as curvas dadas em coordenadas polares por:

    (a) $r = 2 - \cos\theta$ e $r = 1 + \cos\theta$
    (b) $r^2 = \cos\theta$ e $r^2 = \text{sen}\theta$
    (c) $r = \text{sen}\theta$ e $r = 1 - \cos\theta$

Exercícios extras

24. Mostre que a curvatura de $r(t) = (x(t), y(t))$ no plano, definida por funções duas vezes deriváveis, x e y , é dada pela fórmula
$$\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$
que generaliza para o caso de $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ como:
$$\frac{|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}|}{|\overrightarrow{r'}|^3}$$

25. Mostre que a torção de $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida por funções tres vezes diferenciáveis, x , y e z , é dada pela fórmula:
$$\frac{\det(\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''}, \overrightarrow{r'''})}{|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}|^2}$$

26. Calcule a curvatura e a torção das curvas, ou funções vetoriais, dadas nos exercícios 1, 3, 6 e 13.