5ª Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Selecione os candidatos extremantes locais, sendo $f(x, y) =$
   a) $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$
   b) $x^2 - y^2 + 3xy - x + y$
   c) $x^3 - y^2 + xy + 5$
   d) $x^3 + y^3 - xy$
   e) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$
   f) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$

2. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x, y) =$
   a) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
   b) $x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$
   c) $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
   d) $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
   e) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy,\ x > 0 \text{ e } y > 0$

3. Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + k$, onde a, b, c, d, e, e k são constantes. Prove que se (x_o, y_o) for extremante local de f, então será extremante global.

4. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

5. Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

6. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

7. De todos os paralelepípedos retângulos de volume dado, qual o de área total mínima?

8. Seja $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$, com x e y arcos do primeiro quadrante. Determine o(s) ponto(s) que maximiza z.

9. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1, 2, 1)$ e que determina, com os planos coordenados, o tetraedro de volume mínimo. Determine este volume.

10. Inscreva em um círculo de raio R, o triângulo de área máxima.

11. Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.
    a) $f(x, y) = 3x - y$ no conjunto A de todos (x, y) tais que $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y - x \leq 3,\ x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.
    b) $f(x, y) = 3x - y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
    c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$.
    d) $f(x, y) = xy$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$.
    e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

12. Determine (x, y), com $x^2 + 4y^2 \leq 1$, que maximiza a soma $2x + y$.

13. Suponha que $T(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2y + x \leq 4\}$. Determine o ponto de A de menor temperatura.

14. Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1,\ x > 0$ e $y > 0$. Qual é o ponto de tangencia?

15. Determine a superfície de nível da função $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$ que seja tangente ao plano $x+2y+3z=4$. Qual é o ponto de tangencia?

16. Deseja-se construir um paralelepípedo-retângulo com área total de $100cm^2$. Determine as dimensões para o volume ser máximo.

17. Considere a forma quadrática $Q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$ onde $a,\ b,\ c$ são constantes não simultaneamente nulas. Seja $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Suponha que (x_o, y_o, λ_o) seja solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla Q(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Prove que $Q(x_o, y_o) = \lambda_o$.

18. Sejam $Q(x,y)$ e $g(x,y)$ como no exercício anterior. Suponha que os multiplicadores de Lagrange associados ao problema

$$\begin{cases} \nabla Q(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

sejam estritamente positivos. Prove que $Q(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

19. (E.M.B) Resolva o sistema a equação

$$\begin{cases} \cos^n(x+y) - \operatorname{sen}^n(x+y) = 1 \\ x+y = \dfrac{\pi}{40} \ln \sqrt{e^{(\mu/100)\sqrt{2\mu}}} \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{N}^\star$, e μ é o valor da temperatura máxima T, $T = 100x^2yz$ sobre a esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, onde (x,y,z) é um ponto qualquer do espaço.

20. Determine o polinômio de Taylor de ordem um da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.
    a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0,y_0) = (0,0)$.
    b) $f(x,y) = x^3+y^3-x^2+4y$ e $(x_0,y_0) = (1,1)$.
    c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x+4y)$ e $(x_0,y_0) = (0,0)$.

21. Determine o polinômio de Taylor de ordem um da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.
    a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0,y_0) = (0,0)$.
    b) $f(x,y) = x^3+y^3-x^2+4y$ e $(x_0,y_0) = (1,1)$.
    c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x+4y)$ e $(x_0,y_0) = (0,0)$.

22. Seja (x_0,y_0) um ponto crítico de $f(x,y)$ e suponha que f seja de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0,y_0). Prove que para todo (x,y) em B, existe $(\overline{x},\overline{y})$ interno ao segmento de extremidade (x_0,y_0) e (x,y) tal que

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0)^2\right].$$

23. Suponha $f(x,y)$ de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0,y_0) e que as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem sejam limitadas em B. Prove que existe $M > 0$ tal que para todo $(x,y) \in B$,

$$|f(x,y) - P_1(x,y)| \leq M\|(x,y) - (x_0,y_0)\|^2$$

onde $P_1(x,y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (x_0,y_0).

24. Seja $f(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+m$ ($a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ m$, constantes) e seja (x_0,y_0) um ponto crítico de f. Prove que, para todo (h,k),

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = ah^2+bhk+ck^2.$$

25. Sejam $f(x,y)$ e (x_0,y_0) como no exercício anterior. Prove que se $a>0$ e $b^2-4ac<0$, então

$$f(x_0+h,y_0+k)>f(x_0,y_0)$$

para todo $(h,k)\neq(0,0)$. Como é o gráfico de f?

26. Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 da função dada, em torno do ponto $(x_0,y_0)=(1,1)$.

    a) $f(x,y)=x\sin((y+x)\pi/4)\ln(xy)$

    b) $f(x,y)=e^{\cos(x^3+2x^2y+3y^3+x-y)}+\ln\left(\frac{x^2}{x+y}\right)$

27. Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 das funções dadas em torno do ponto $(x_0,y_0)=(1,0)$.

    a) $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+e^{-y}$

    b) $f(x,y)=2xe^{(x^2+y^2)}+\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

28. Utilize os Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrições dada(s).

    a) $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$; $x+y+z=1$; $y^2+z^2=4$

    b) $f(x,y,z)=3x-y-3z$; $x+y-z=0$; $x^2+2z^2=1$

29. Maximize as funções $f(x,y,z)$ dadas sujeitas ás respectivas restrições:

    a) $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ sujeita às restrições $2x-y=0$ e $y+z=0$

    b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeita às restrições $x+2y+3z=6$ e $x+3y+9z=9$