USP/ICMC/SMA - Lista de Exercícios de Geometria Diferencial

Maria Aparecida Soares Ruas **March 3, 2009**

Salvo menção em contrário, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ indicará uma curva parametrizada por comprimento de arco s, com curvatura $k(s) \neq 0$, para todo $s \in I$.

Ex. 1.1. Considere a hélice cilíndrica parametrizada por comprimento de arco. Mostre que

(a) as retas contendo $n(s)$ e passando por $\alpha(s)$ encontram o eixo Oz sob um ângulo constante igual a $\pi/2$.

(b) as retas tangentes a α fazem um ângulo constante com o eixo Oz.

Ex. 1.2. Mostre que a torção τ de α é dada por:

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s).\alpha'''(s)}{|k(s)|^2}.$$

Ex. 1.3. Suponha que todas as normais a uma curva parametrizada passem por um ponto fixo. Mostre que o traço da curva está contido em um círculo.

Ex. 1.4. Uma curva parametrizada regular α tem a seguinte propriedade: todas as suas tangentes passam por um ponto fixo.

a) Prove que o traço de α é (o segmento de) uma reta.

b) A conclusão ainda é válida se α não é regular?

Ex. 1.5. Mostre que o conhecimento da função vetorial $b = b(s)$ (vetor binormal) de uma curva α, de torção não nula por toda parte, determina a curvatura $k(s)$ e o valor absoluto da torção $\tau(s)$ de α.