

Exercício 6.1

Classificar e desenhar todas as cônicas com equação da forma:

- (i) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$
- (ii) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + cx + dy + e = 0$. Em que situação não é possível colocar nesta forma?

Exercício 6.2

Encontre o centro da cônica (se existir) e a(s) direção(ções) do(s) eixo(s) de simetria.

- (i) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x = 0$;
- (ii) $x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - y + 1 = 0$.

Exercício 6.3

- (i) Em termos de equação da cônica, qual o efeito de se transladar a origem do sistema de coordenadas para o centro e rotacionar os eixos coordenados para coincidirem com os eixos de simetria?
- (ii) Como se utiliza a matriz da cônica para procurar o centro da cônica? E os eixos de simetria? Qual a relação dos auto-vetores e auto-valores da matriz da parte quadrática com os eixos de simetria?
- (iii) Quando se efetua uma translação da origem no sistema de coordenadas, os coeficientes da parte quadrática se modificam como? e a parte independente?
- (iv) Quando se efetua uma rotação nos eixos coordenados, o que permanece invariante?
- (v) Quais são as possibilidades para cônicas com determinante da parte quadrática positivo? e nulo? e negativo?

Exercício 6.4

Desenhe as seguintes cônicas, deduza a equação e resolva as outras questões colocadas:

- (i) Elipse, de centro $(1, 2)$, semi-eixos com $a = 5$ e $b = 3$ paralelos aos eixos coordenados dos x e y , respectivamente. Qual a excentricidade?
- (ii) Hipérbole, com focos $(2, 3)$ e $(-4, 3)$, e distância entre os vértices 4. Encontre também as assíntotas e suas equações. Qual a excentricidade?
- (iii) Parábola de vértice $(0, 0)$ e foco $(3, 4)$.

Uma cônica pode ser caracterizada como o lugar geométrico dos pontos P do plano $e = d(P, F)/d(P, r)$, onde F e r é um ponto fixado e r uma reta fixada. F é um foco e r é chamada uma reta diretriz da cônica. Determine as retas diretrizes da cônicas dos itens acima.

Exercício 6.5

Escreva a forma reduzida das elipses:

- (i) com focos $(0, \pm 6)$ e $a = 17$.
- (ii) com extremidades do eixo menor em $(0, \pm 4)$, e o comprimento $L = \frac{8}{5}$ da corda perpendicular ao eixo maior da elipse e que passa por um dos focos.

Exercício 6.6

Em cada um dos itens abaixo, determine um novo sistema de coordenadas em que a cônica fica na forma reduzida. Escreva as equações no novo sistema.

- (i) $x^2 + xy + y^2 = 1$;
- (ii) $xy + 2x - y = 0$;
- (iii) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$.

Exercício 6.7

Mostre que a equação de uma circunferência em um sistema de coordenadas ortogonais não muda por rotações.

Exercício 6.8

Encontre a equação da reta tangente à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ no ponto $(2, 1 - \sqrt{3})$.

Exercício 6.9

Encontre a equação da reta tangente à elipse $\frac{(x-1)^2}{4} + (y - 1)^2 = 1$ no ponto $(2, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercício 6.10

Encontre a equação da reta tangente à hipérbole $\frac{(x-1)^2}{4} - (y - 1)^2 = 1$ no ponto $(3, 1)$.

Exercício 6.11

Determine os vértices, os focos e a excentricidade da elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$. Faça um esboço.

Exercício 6.12

Escreva a equação reduzida da elipse que tem centro na origem, focos num dos eixos coordenados e passa por $(3, 2)$ e $(1, 4)$.

Exercício 6.13

Ache os vértices e a área de um quadrado com lados paralelos aos eixos, inscrito na elipse $9x^2 + 16y^2 = 100$.

Exercício 6.14

Determine os vértices, os focos, a excentricidade e as assíntotas da hipérbole $16x^2 - 25y^2 = 400$. Faça um esboço.

Exercício 6.15

Escreva a equação reduzida da hipérbole, dados:

- (i) $b = 4$, as assíntotas $2y = \pm 3x$ (focos no eixo dos y);
- (ii) as assíntotas $2y = \pm x$ e um ponto da hipérbole, $(5, 9)$.

Exercício 6.16

Obtenha a equação da hipérbole com focos em $(3, -3)$, $(3, 7)$ e $a = 3$.

Exercício 6.17

Esboce o gráfico da cônica representada por

- (i) $G(x, y) = 3x^2 + 3y^2 = 2xy + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$
- (ii) $G(x, y) = x^2 = 4y^2 = 4xy - 1 = 0$
- (iii) $G(x, y) = 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 38x - 34y + 71 = 0$

Exercício 6.18

Reduza a equação à forma mais simples, através de translação e eventual rotação. Dê o ângulo de rotação. Descreva o conjunto representado.

- (i) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$
- (ii) $x^2 - 11y^2 - 5xy - x + 37y + 52 = 0$
- (iii) $17x^2 + 8y^2 - 12xy = 0$