5ª Lista de Exercícios de Geometria Analítica

Professor: Maria Aparecida Soares Ruas *19 de Abril de 2005*

(i) Dados os pontos A, B e C, escrever a equação vetorial, paramétrica e simétrica (se existir) da reta r, que passa pelo ponto A e tem direção do vetor $\overrightarrow{BC}$, para os seguintes casos:
a) $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$, $C = (4, -7, -6)$
b) $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (2, -1, -3)$
Verifique se o ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a alguma das retas acima.

(ii) Encontre as equações paramétricas para a reta r, que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ e:
a) é paralela a reta
$$s : \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$$
b) é paralela a reta
$$s' : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda, \quad \lambda \in R \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

(iii) Dados $A = (0, 2, 1)$ e $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, encontre os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ do ponto A. Represente geometricamente a reta e os pontos encontrados.

(iv) Dada a reta
$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in R$$
e os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, encontre o ponto da reta r que é eqüidistante do ponto A e do ponto B.

(v) Duas partículas efetuam movimentos descritos pelas leis:
$$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4), \quad \lambda \in R$$
e
$$X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1), \quad \lambda \in R$$
Pergunta-se: haverá colisão entre as partículas?

(vi) Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Encontre um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $1/2$, em cada um dos casos abaixo:
a) $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 2, 3)$
b) $B = (1, 3, 2)$, $B = (2, 2, 2)$

Fixado um sistema de coordenadas

(i) Encontre a equação vetorial e paramétrica para os planos descritos abaixo:
a) π passa pelos pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.
b) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (3, -1, 1)$.

(ii) Encontre as equações paramétricas e vetoriais para cada um dos planos coordenados.

(iii) Encontre as equações paramétricas e vetorial do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\alpha : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$.

(iv) Encontre a equação vetorial da reta r obtida da intersecção dos planos π_1 e π_2 onde
$\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$
$$\pi_2 : \begin{cases} x = -2\mu \\ y = 3\lambda - \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

(v) Verifique se os planos π_1 e π_2 são iguais nos seguintes casos:

a) $\pi_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$

$\pi_2 : \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 1 + 3\alpha - \beta \\ z = 1 - 5\alpha + 3\beta \end{cases}$

(vi) Encontre a equação geral para os planos π dados abaixo:

a) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

b) π passa pelo ponto $A = (1, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

(vii) Encontre a equação geral do plano π tal que:

a) π contém as retas r e s tais que

$r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z$ e $s : x - 1 = y = z$

b) $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$

c) π contém a reta r e passa pelo ponto $P = (4, 1, -1)$ onde

$r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$

(observe que $P \notin r$).

(viii) Sejam

π_1 : o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

π_2 : o plano que passa pelo ponto $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

π_3 : $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$

a) Encontre as equações gerais dos planos π_1, π_2, π_3

b) Determine $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

(ix) Verifique se a reta r está contida no plano π:

a) $r : x - 1 = 2y = 4 - z$ e $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$

(x) Verifique se as retas abaixo são concorrentes. Caso afirmativo encontre a equação geral do plano determinado por elas:

a) $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\mu \end{cases}$ $s : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{2+z}{5}$

b) $r : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(xi) Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa pelos pontos: $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.

(xii) Decomponha o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ paralela e ortogonalmente ao plano π

$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \eta \end{cases}$

(xiii) Dê uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.

(xiv) Escreva equações paramétricas da reta intersecção dos planos:

$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \eta \end{cases}$ $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \eta \\ y = 2\lambda + \eta \\ z = 3 - \eta \end{cases}$

(xv) Escreva equações da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \eta \\ y = \lambda + \eta \\ z = \lambda \end{cases}$$

(xvi) Seja L o conjunto de todos os pontos de E^3 que eqüidistam de $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$. Mostre que L é um plano que passa pelo ponto médio de AB. Determine um vetor normal a esse plano.

(i) Encontre a equação geral do plano π que contém o eixo x e é perpendicular à reta $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1)$.

Seja $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema de coordenadas.

(ii) Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

a) $r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ e $s : X(0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

b) $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \dfrac{z-1}{4}$

c) $r : \dfrac{x+1}{2} = y = -z$ e $s : \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$.

(iii) Estude a posição relativa entre a reta r e o plano π nos seguintes casos:

a) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$ e $\pi : x - y - z = 2$

b) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi : X = (0, 1/2, 0) + \lambda(1, -1/2, 0) + \mu(0, 1, 1)$

(iv) Encontre $m \in R$ de modo que a reta $r : \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{m}$ seja transversal ao plano $\pi : x + my + z = 0$.

(v) Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2 nos seguintes casos:

b) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z = 0$

c) π_1 passa pelo ponto $(0, 0, 1)$ e tem como um vetor normal $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ e $\pi_2 : x - y + 2z - 2 = 0$.

(vi) Encontre $m \in R$ para que os planos $\pi_1 : X = (1, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1) + \mu(1, 1, m)$ e $\pi_2 : 2x + 3y + 2z + 1 = 0$, sejam paralelos e distintos.