4ª Lista de Exercícios de Geometria Analítica

Professor: Maria Aparecida Soares Ruas 19 de Abril de 2005

---

*Exercício 4.1*
Mostre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.

*Exercício 4.2*
Mostre que se $E$ e $F$ são bases ortonormais então a matriz $M$ de mudança de base de $E$ para $F$ satisfaz $M.M^t = M^t.M = I$, onde $I$ é a matriz identidade. Matrizes com essa propriedade chamam-se *ortogonais*.

*Exercício 4.3*
Mostre que uma matriz ortogonal $2 \times 2$ deve ter uma das seguintes formas: $\begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{pmatrix}$

*Exercício 4.4*

(i) Considere uma base ortonormal e dados os vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (3, -1, m)$, encontre $m$ de modo que $\overrightarrow{u}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{v}$;

(ii) Seja agora $\overrightarrow{w} = (3, -1, 1)$. Construa uma base ortonormal $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ com $\overrightarrow{e_1}$ paralelo ao vetor $\overrightarrow{u}$ do ítem anterior e $\overrightarrow{e_2}$ coplanar com $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ (combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$).

*Exercício 4.5*
Verifique a identidade: $(\vec{a} - \vec{b}) \wedge (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a}$.

*Exercício 4.6*
Resolva a equação vetorial no vetor incógnita $\vec{x}$: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

*Exercício 4.7*
Seja $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ uma base ortonormal. Encontre um vetor unitário $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i}$.

*Exercício 4.8*
Dados $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$, encontre uma base ortonormal positiva $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

(i) $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{u}$, e os dois têm o mesmo sentido;

(ii) $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e a sua primeira coordenada é positiva.

*Exercício 4.9*
Prove que a altura do tetraedro ABCD relativa à base ABC é

$$h = ||[\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}]||/||\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}||$$

*Exercício 4.10*
Prove que se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base e $\vec{x}$ é um vetor,

$$\vec{x} = ([\vec{x}, \vec{j}, \vec{k}]/[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}])\vec{i} + ([\vec{x}, \vec{k}, \vec{i}]/[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}])\vec{j} + ([\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}]/[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}])\vec{k}.$$

*Exercício 4.11*
Prove que $||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 \leq ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2$.

*Exercício 4.12*
Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = \left(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right)$ são bases de $V^3$, tais que

$$\begin{aligned} \vec{f_1} &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f_2} &= \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f_3} &= \vec{e}_2 \end{aligned}$$

verifique se $E$ tem a mesma oientação que $F$.