3ª Lista de Exercícios de Geometria Analítica

Professor: Maria Aparecida Soares Ruas 07 de Abril de 2005

Exercício 3.1
Considere os vetores:

$$u = (1, -1, 2) \qquad v = (3, 1, 5) \qquad w = (2, 0, -3) \qquad t = (8, 2, 7)$$

a) Verifique que u, v e w são linearmente independentes.
b) Verifique se u é combinação linear de v, w e t.
c) Caso contrário, determine um entre os três restantes que seja combinação linear dos demais.

Exercício 3.2
Fixada uma base ortonormal $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, e tomado $\vec{v} \neq \vec{0}$, chamam-se *co-senos diretores de* $\vec{v}$ *relativamente à base fixada* os números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, onde α, β, γ, são as medidas dos ângulos que $\vec{v}$ forma, respectivamente, com $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

a) Sendo $\vec{v} = (x, y, z)$, prove que

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

b) Prove que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

c) Prove que os co-senos diretores $\vec{v}$ são as coordenadas do versor de $\vec{v}$, isto é, de $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

d) Sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, de co-senos diretores $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ e $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, respectivamente, mostre que

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\,.$$

e) Ache os co-senos diretores de $\vec{v} = \left(1, -3, \sqrt{6}\right)$ e de $-\vec{v}$.

f) Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ bases ortonormais, mostre que a j-ésima coluna da matriz de mudança de E para F é formada pelos co-senos diretores de $\vec{f}_j$ em relação a E.

Exercício 3.3
(Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.) Dada a base $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ ache uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que $\vec{e}_1 \,//\, \vec{f}_1$ e $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ sejam combinações lineares de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$. Aplique o resultado obtido aos vetores $vecf_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

Exercício 3.4
Mostre que

a) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (propriedade triangular)
b) $|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$
c) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ são lineares dependentes.

Exercício 3.5
Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base de E e sejam

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \vec{e}_1\\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2\\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\end{aligned}$$

Mostre que $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ é uma base de V^3.

Exercício 3.6
Calcule as coordenadas do vetor $v = (2, 1, 1)_E$ na base F do exercício anterior.

Exercício 3.7
Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3, encontre a medida, em radianos, do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, nos casos:
a) $\vec{u} = (1, 0, 1)_E$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)_E$
b) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)_E$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Exercício 3.8
Encontre $x \in R$ de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, onde $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal de V^3.
a) $\vec{u} = (x, 0, 3)_E$, $\vec{v} = (1, x, 3)_E$
b) $\vec{u} = x\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{v} = 4\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
c) $\vec{u} = x\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{v} = (x, -3, 1)_E$

Exercício 3.9
Determine $x, y, z \in R$ de modo que $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ seja uma base ortonormal de V^3, onde $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ é uma base ortonormal de V^3.
a) $\vec{e}_1 = (x, y, z)_F$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)_F$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)_F$
b) $\vec{e}_1 = \left(\sqrt{2}/2\,, \sqrt{2}/2, 0\right)_F$, $\vec{e}_2 = \left(-\sqrt{2}/2\,, \sqrt{2}/2, 0\right)_F$, $\vec{e}_3 = (x, y, z)_F$

Exercício 3.10
Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Determine o vetor $\vec{u}$ em cada um dos casos abaixo:
a) $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$; $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, onde $\vec{v} = (2, 3, -1)_E$, $\vec{w} = (2, -4, 6)_E$
b) $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, onde $\vec{v} = (4, -1, 5)_E$, $\vec{w} = (1, -2, 3)_E$ e $\vec{u} \cdot (1, 1, 1)_E = -1$
c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$; $\vec{u}$, $(1, 1, 1)_E$, $(0, 1, -1)_E$ são LD e $\vec{u}$ $(2, 1, -1)_E$.

Exercício 3.11
Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Encontre a projeção de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$ nos casos:
a) $\vec{w} = (1, -1, 2)_E$ e $\vec{v} = (3, -1, 1)_E$.
b) $\vec{w} = (-1, 1, 1)_E$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)_E$.

Exercício 3.12
Ache $\vec{u}$ ortogonal à $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ e que satisfaz $\vec{u} = (1, 1, 1) = -1$.

Exercício 3.13
Decompor $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ com $\vec{w}_1$, paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

Exercício 3.14
Mostre que:
i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\right)$.
ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|$.

Exercício 3.15
Determinar m de modo que sejam linearmente dependentes os vetores:
a) $(3, 5, 1)$, $(2, 0, 4)$ e $(1, m, 3)$
a) $(1, 3, 5)$ e $(2,\ 1 + m,\ 10)$
a) $(m, 2, n)$ e $(3,\ m + n,\ m - 1)$