$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Geometria Analítica

Professora: Maria Aparecida Soares Ruas *12 de Abril de 2010*

Exercício 4.1
Verifique: se u, v e w são dois a dois ortogonais, então êles também são linearmente independentes. A recíproca é verdadeira?

Exercício 4.2
Considere os vetores:

$$u = (1, -1, 2) \qquad v = (3, 1, 5) \qquad w = (2, 0, -3) \qquad t = (8, 2, 7)$$

a) Verifique que u, v e w são linearmente independentes.
b) Verifique se u é combinação linear de v, w e t.
c) Caso contrário, determine um entre os três restantes que seja combinação linear dos demais.

Exercício 4.3
Fixada uma base ortonormal $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, e tomado $\vec{v} \neq \vec{0}$, chamam-se *co-senos diretores de* $\vec{v}$ *relativamente à base fixada* os números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, onde α, β, γ, são as medidas dos ângulos que $\vec{v}$ forma, respectivamente, com $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

a) Sendo $\vec{v} = (x, y, z)$, prove que

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ , \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ , \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ .$$

b) Prove que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\ .$$

c) Prove que os co-senos diretores $\vec{v}$ são as coordenadas do versor de $\vec{v}$, isto é, de $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

d) Sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, de co-senos diretores $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ e $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, respectivamente, mostre que

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\ .$$

e) Ache os co-senos diretores de $\vec{v} = \left(1, -3, \sqrt{6}\right)$ e de $-\vec{v}$.

f) Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ bases ortonormais, mostre que a j-ésima coluna da matriz de mudança de E para F é formada pelos co-senos diretores de $\vec{f}_j$ em relação a E.

Exercício 4.4
(Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.) Dada a base $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ ache uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que $\vec{e}_1 \,//\, \vec{f}_1$ e $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ sejam combinações lineares de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$. Aplique o resultado obtido aos vetores $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

Exercício 4.5
Mostre que
a) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (propriedade triangular)
b) $|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$
c) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ são lineares dependentes.

Exercício 4.6

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3.

Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)_E$, $\vec{v} = (2, 1, 3)_E$, $\vec{w} = (-1, -1, 4)_E$ encontre:

a) as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{u} + 3\vec{v} - 8\vec{w}$ em relação a base E.

b) $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$, $\|\vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}\|$.

c) verifique se: $\vec{u} \perp \vec{v}$; $\vec{u} \perp \vec{w}$; $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Exercício 4.7

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3, encontre a medida, em radianos, do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, nos casos:

a) $\vec{u} = (1, 0, 1)_E$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)_E$

b) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)_E$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Exercício 4.8

Encontre $x \in R$ de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, onde $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal de V^3.

a) $\vec{u} = (x, 0, 3)_E$, $\vec{v} = (1, x, 3)_E$

b) $\vec{u} = x\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{v} = 4\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

c) $\vec{u} = x\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{v} = (x, -3, 1)_E$

Exercício 4.9

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Determine o vetor $\vec{u}$ em cada um dos casos abaixo:

a) $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$; $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, onde $\vec{v} = (2, 3, -1)_E$, $\vec{w} = (2, -4, 6)_E$

b) $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, onde $\vec{v} = (4, -1, 5)_E$, $\vec{w} = (1, -2, 3)_E$ e $\vec{u} \cdot (1, 1, 1)_E = -1$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$; $\vec{u}$, $(1, 1, 1)_E$, $(0, 1, -1)_E$ são LD e $\vec{u}$ $(2, 1, -1)_E$.

Exercício 4.10

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Encontre a projeção de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$ nos casos:

a) $\vec{w} = (1, -1, 2)_E$ e $\vec{v} = (3, -1, 1)_E$.

b) $\vec{w} = (-1, 1, 1)_E$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)_E$.

Exercício 4.11

Ache $\vec{u}$ ortogonal à $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ e que satisfaz $\vec{u} = (1, 1, 1) = -1$.

Exercício 4.12

Ache $\vec{u}$ tal que:

i) $|\vec{u}| = \sqrt{2}$

ii) A medida em graus do ângulo entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ é 45°

iii) $\vec{u} \perp (1, 1, 0)$

Exercício 4.13

Decompor $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ com $\vec{w}_1$, paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

Exercício 4.14

Mostre que:

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\right)$.

ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|$.

Exercício 4.15

Achar a projeção do vetor $3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ na direção do vetor $\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$.