6ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-341- ELEMENTOS DE MATEMÁTICA	14-11-06

Professora: Ires Dias

1. Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$ e $d = mdc(a, b)$. Mostre que:
   (a) $mdc(sa, sb) = sd$, para todo $s \in \mathbb{Z}$, com $s \geq 0$.
   (b) $mdc(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.
2. Se $z \mid a.b$ e $mdc(z, a) = 1$, então $z \mid b$.
3. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z};\ mdc(x, 2) = 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z};\ mdc(x, 3) = 1\}$. Determine $A \cap B$.
4. Mostre que para todo natural n, vale: $n^2 \equiv 1 \mod 4$ ou $n^2 \equiv 0 \bmod 4$.
5. Se m for um inteiro positivo par, mostre que $\{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm(\dfrac{m}{2} - 1), \dfrac{m}{2}\}$ é um sistema completo de restos módulo m.
6. Se $n \in \mathbb{N}$ não é múltiplo de 3, prove que $a = 3^{2n} + 3^n + 1$ é divisível por 13.
7. Mostre que $8^n - 3^n$ é múltiplo de 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.
8. Sejam m e n inteiros ímpares. Mostre que:
   (a) 4 divide $(2m - 2n)$.
   (b) 8 divide $(m^2 - n^2)$.
   (c) 8 divide $(m^2 + n^2 + 2)$.
9. Mostre que para todo inteiro $n \geq 0$, temos:
   (a) 7 divide $(2^{3n} - 1)$.
   (b) 8 divide $(3^{2n} + 7)$.
   (c) 3 divide $[2^n + (-1)^n]$.
10. Ache o quociente e o resto na divisão euclidiana de a por b nos seguintes casos:
    (a) $a = 390$, $b = 74$ (b) $a = -124$, $b = 18$ (c) $a = -420$, $b = 58$.
11. Na divisão euclidiana de 326 pelo inteiro b segundo o algoritmo da divisão de Euclides, o quociente é 14 e o resto é r. Ache os possíveis valores de b e r.
12. Mostre que o produto de cinco inteiros consecutivos é múltiplo de 120.
13. Mostre que para todo natural n, temos:
    (a) 3 divide $(n^3 - n)$.
    (b) 5 divide $(n^5 - n)$.
    (c) 7 divide $(n^7 - n)$.
14. (a) Se n é um inteiro arbitrário, mostre que $n(2n + 7)(7n + 1)$ é múltiplo de 6.
    (b) Mostre que $ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ é múltiplo de 30 para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.
15. Seja a um inteiro. Mostre que:
    (a) Um dos inteiros a, $a + 1$, $a + 2$ é divisível por 3.
    (b) Um dos inteiros a, $a + 2$, $a + 4$ é divisível por 3.
    (c) Um dos inteiros a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$ é divisível por 4.

16. Seja m um inteiro. Mostre que o resto da divisão de m^2 por 3 é 0 ou 1.

17. Se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $n^2 + 2$ é primo, prove que n é múltiplo de 3.

18. Mostre que existe uma infinidade de primos da forma $4k + 1$.

19. Se $mdc(a, b) = p$, onde p é primo, mostre que:
    (a) $mdc(a^2, b) = p$ ou p^2.
    (b) $mdc(a^3, b) = p, p^2$ ou p^3.
    (c) É possível generalizar este resultado?

20. (a) Encontre o expoente de 5 na decomposição de 100! em fatores primos.
    (b) Encontre o expoente de 7 na decomposição de 1000 em fatores primos.

21. Se $p \geq 5$ é primo, prove que $p^2 + 2$ não é primo.

22. Mostre que se $2^m + 1$ é primo, para algum $m > 0$, então m é uma potência de 2.

23. (a) Se n é inteiro par, mostre que $mdc(n, n + 2) = 2$.
    (b) Se n é ímpar, prove que $mdc(n, n + 2) = 1$.

24. Sejam $a,\ b, \in \mathbb{Z}$. Mostre que $mdc(a, b) = 1 \Longleftrightarrow mdc(a + b, b) = 1$.

25. Ache os restos nas seguintes divisões:
    (a) 2^{45} por 7. (b) 11^{10} por 100. (c) $5^2.4841 + 28^5$ por 3.

26. Usando congruência, encontre os critérios de divisibilidade por 3, 4, 5, 6 e 7.

27. Qual é o resto na divisão euclidiana de $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 99^5 + 100^5$ por 4? Justifique.

28. (a) Se a é cubo perfeito ($a = t^3$), então $a \equiv 0, 1$ ou $-1 \mod 9$.
    (b) Se a é quadrado perfeito ($a = t^2, t \in \mathbb{Z}$) e também cubo perfeito ($a = s^3, s \in \mathbb{Z}$), então $a \equiv 0,\ 1,\ 9$ *ou* $28 \mod 36$.

29. Se $d = mdc(a, b)$, encontre $x_0,\ y_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $ax_0 + by_0 = d$, nos seguintes casos:
    (a) $a = -68,\ b = 42$. (b) $a = 102,\ b = 49$. (c) $a = 236,\ b = 126$.