5ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-341- ELEMENTOS DE MATEMÁTICA	30-11-06

Professora: Ires Dias

1. A partir da lei da tricotomia de $\mathbb{N}$ prove que se $ab = ac$ com $a \neq 0$ então $b = c$.

2. Mostre que se a, $b \in \mathbb{N}$ e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

3. Prove as propriedades abaixo relativas aos números naturais usando o princípio de indução:

   a) $1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n \geq 1$.

   b) Se $a \geq 2$, então $1 + a + ... + a^n < a^{n+1}$, $\forall n \geq 1$

   c) Se $a \geq 2$, então $2a^n \leq a^{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

   d) $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$.

   e) Se a e b são numeros inteiros com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então $a^2 + ab + b^2 > 0$

   f) a, $b \in \mathbb{Z}$ e $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$

   g) a, $b \in \mathbb{Z}$ e $a^5 = b^5 \Rightarrow a = b$

4. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que:

   a) $f(0) = 0$

   b) $f(-a) = f(a)$, para todo $a \in \mathbb{Z}$

   c) $f(\sum_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$

5. Mostre que uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfaz $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, se e somente se $f(n) = nf(1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

6. Prove que o número de subconjuntos de um conjunto finito com n elementos é 2^n, usando indução.

7. Prove que o produto de quatro números naturais consecutivos, acrescidos de 1, é um quadrado perfeito.

8. a) Prove que a soma de dois números inteiros pares é par e que a soma de dois números inteiros ímpares também é par.

   b) O produto de dois números inteiros é ímpar se, e somente se, ambos são ímpares.

9. Se a e b são números inteiros, $a \neq 0$, $b \neq 0$, prove que

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ... + a\,b^{n-2} + b^{n-1}),\ \forall n \geq 1.$$

10. Sejam a e b números naturais tais que $a + b = 1$. Prove que $a = 1$ ou $b = 1$.

11. Sejam a e b números naturais não nulos. Prove que $a \leq ab$ e $b \leq ab$.

12. Sejam x e y inteiros tais que $xy = 1$. Prove que $x = y = 1$ ou $x = y = -1$.

13. Prove que $a < b + c \Longleftrightarrow a - b < c$.

14. Se $a < b$ e $c < d$,

    a) Mostre que $a - d < b - c$.

    b) Mostre que $bc + ad < ac + bd$.

15. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\{x \in \mathbb{Z} : n < x < n + 1\} = \emptyset$.

16. Verifique as seguintes propriedades algébricas para $\mathbb{Z}$:

    a) A comutatividade da adição.

    b) A associatividade da multiplicação.

    c) A ditributividade da multiplicação em relação à adição.

17. Considerando a relação $\leq$ definida em $\mathbb{Z}$, mostre que ela é transitiva e mostre a compatibilidade com a adição.

18. Sejam $a, b, c, d, a', b', c', d'$ elementos de $\mathbb{N}$ com $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$. Então, mostre que as operações de adiçao e de multiplicação estão bem definidas em $\mathbb{Z}$, isto é:

    a) $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$

    b) $(ac + bd, ad + bc) \sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$