$4^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-341- ELEMENTOS DE MATEMÁTICA	04-10-05

Professora: Ires Dias

1. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e seja $O = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ o conjunto dos naturais ímpares. Mostre que $\mathbb{N} \sim O$. Conclua que $card(\mathbb{N}) = card(O)$.

2. Seja A um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Mostre que $card(\mathbb{N}) = card(A)$.

3. Sejam A e B conjuntos. Mostre que se $A \subseteq B$ então $card(A) \leq card(B)$

4. Sejam A e B conjuntos tais que $A \sim \mathbb{N}$ e $B \sim \mathbb{N}$. Mostre que:
   a) $A \bigcup B \sim \mathbb{N}$
   b) $A \times B \sim \mathbb{N}$

5. Sejam $A_1, ..., A_n$ conjuntos tais que $A_i \sim \mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, .., n\}$. Mostre que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim \mathbb{N}$.

6. Sejam $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos tais que $A_n \sim \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \mathbb{N}$ (Ou seja: Reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável).

7. Mostre que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por: $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se n é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{se n é ímpar} \end{cases}$ é bijetora.

   Conclua que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

8. Seja X um conjunto infinito, $x_0 \in X$ e $Y \subseteq X$. Mostre que:
   a) $X - \{x_0\}$ é infinito.
   b) $X - Y$ é infinito.
   c) $card(X) = card(X - \{x_0\})$.
   d) $card(X) = card(X - Y)$.

9. Mostre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, vale:
   $(a, b) \sim [a, b) \sim (a, b] \sim (-\infty, b) \sim (-\infty, b] \sim [a, \infty) \sim (a, \infty) \sim \mathbb{R}$

10. Seja X tal que $card(X) > card(\mathbb{N})$. Mostre que se $A \subseteq X$ é tal que $card(A) = card(\mathbb{N})$, então $card(X - A) = card(X)$.

11. Sejam A, B, A', B' conjuntos tais que $card(A) = card(A')$ e $card(B) = card(B')$, $A \cap B = \emptyset$, $A' \cap B' = \emptyset$ então $card(A' \cup B') = card(A \cup B)$.

12. Sejam X, Y, Z, W conjuntos tais que $X \sim Y$ e $Z \sim W$. Então $X \times Z \sim Y \times W$.

13. Seja n um número cardinal finito. Prove que $n < card\,\mathbb{N}$

14. Seja a o cardinal de um conjunto infinito. Prove que $card(\mathbb{N}) \leq a$.
    Conclua que $card(\mathbb{N})$ é o menor cardinal não finito.

15. Prove que se A, B, C são conjuntos tais que $A \subseteq B \subseteq C$ e $A \sim C$ então $A \sim B$.
    (Use o Teorema de Schröder- Berstein)

16. Sejam A e B conjuntos. Prove que se $A \sim B$ então $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \sim \mathcal{P}(\mathcal{B})$

17. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que :

    a) Se $card(A) \leq card(B)$ e $card(B) \leq card(C)$ então $card(A) \leq card(C)$.

    b) Se $card(A) < card(B)$ e $card(B) < card(C)$ então $card(A) < card(C)$.

18. Sejam: $n = card(\{1, ..., n\})$, $\aleph_0 = card(\mathbb{N})$ e $\aleph_1 = card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

    Determine o resultado das seguintes operações com cardinais:

    a) $n + \aleph_0$

    b) $n + \aleph_1$

    c) $\aleph_0 + \aleph_1$

    d) $n\aleph_0$

    e) $n\aleph_1$

    f) $\aleph_0\aleph_1$

    g) $\aleph_1\aleph_1$

19. Mostre que $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$