3ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-341- ELEMENTOS DE MATEMÁTICA 19-09-06

Professora: Ires Dias

1. Determine quais das propriedades: reflexiva, simétrica, transitiva, anti-simétrica são satisfeitas por cada uma das seguintes relações sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais:
   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ y = 1/x\}$.
   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ |x - y| \leq 1\}$.
   (c) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ y^2 = x^2\}$.
   (d) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ x \neq y\}$.
   (e) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ xy \geq 0\}$.

2. Dê um exemplo de uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A que seja simétrica e transitiva e não seja reflexiva.

3. Dê dois exemplos, um listando os pares ordenados e o outro, descrevendo-os através de uma regra, de relações que tenham as propriedades reflexiva e simétrica e não tenham a transitiva.

4. Sejam $\mathcal{R}$ uma relação sobre A e Δ a relação identidade sobre um conjunto não vazio A, isto é, $\Delta = \{(x, x);\ x \in A\}$. Mostre que:
   (a) $\mathcal{R}$ é reflexiva se, e somente se $\Delta \subseteq \mathcal{R}$.
   (b) Se $\mathcal{R}$ tiver ambas as propriedades simétrica e anti-simétrica, então $\mathcal{R} = \Delta$.
   (c) $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
   (d) Se $\mathcal{R} \neq \emptyset$ é anti-simétrica, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \Delta$.

5. Sejam A um conjunto e $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ relações sobre A. Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:
   (a) Se $\mathcal{R}$ é simétrica, então $\mathcal{R}^{-1}$ é simétrica.
   (b) Se $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, então $\mathcal{R}^{-1}$ é anti-simétrica.
   (c) Se $\mathcal{R}$ é transitiva, então $\mathcal{R}^{-1}$ é transitiva.
   (d) Se $\mathcal{R}$ é reflexiva, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.
   (e) Se $\mathcal{R}$ é simétrica, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.
   (f) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são simétricas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é simétrica.
   (g) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são simétricas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é simétrica.
   (h) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são transitivas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é transitiva.
   (i) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são transitivas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é transitiva.
   (j) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são anti-simétricas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é anti-simétrica.
   (l) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são anti-simétricas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é anti-simétrica.
   (m) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são reflexivas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é reflexiva.
   (n) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são reflexivas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é reflexiva.

6. Existe algum conjunto A tal que toda relação sobre A é:
   (a) Reflexiva?
   (b) Simétrica?
   (c) Transitiva?
   (d) Anti-simétrica?

   Existe mais de um conjunto?

7. Quais das relações dadas no primeiro exercício são de equivalência? Justifique.

8. (a) Verifique que a relação
   $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,5),(5,2),(3,5),(5,3),(2,30,(3,2)\}$
   é uma relação de equivalência em $A = \{1,2,3,4,5\}$.

   (b) Determine $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ e $\bar{5}$.

   (c) Determine $A/\mathcal{R}$.

9. Seja $\sim$ a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por $x \sim y$ se, e somente se $x - y \in \mathbb{Z}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}$.

10. Defina a relação $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{R}$ por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se $cos(x) = cos(y)$ e $sen(x) = sen(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
    (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
    (b) Se $a \in \mathbb{R}$, determine $\bar{a}$.

11. Seja $\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3);\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$. Defina em $A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ a seguinte relação:

    $$x \sim y \text{ se existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \alpha y, \text{ para todo } x, y \in A.$$

    (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.
    (b) Descreva geometricamente $\bar{x}$, para algum $x \in A$.

12. Seja f uma função real com domínio real. Defina a relação $\mathcal{R}_f$ pela regra

    $$x\mathcal{R}_f y \text{ se, e somente se } f(x) = f(y).$$

    Mostre que $\mathcal{R}_f$ é uma relação de equivalência.

13. Em $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, defina a seguinte relação:

    $$(a,b) \sim (c,d) \iff a + d = b + c, \text{ para todo } a, b, c, d \in \mathbb{N}.$$

    (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.
    (b) Encontre as seguintes classe de equivalências $\overline{(1,0)}$, $\overline{(0,1)}$, $\overline{(1,1)}$ e $\overline{(0,0)}$.

14. Defina em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ a seguinte relação:

    $$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc, \text{ para todo } a, c \in \mathbb{Z} \text{ e } b, d \in \mathbb{N}.$$

    (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
    (b) Pense um pouco sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\sim$. Compare-o com $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais.