2ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-341- ELEMENTOS DE MATEMÁTICA 13-09-2006

Professora: Ires Dias

1. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando.
   (a) $3 = \{3\}$.
   (b) $5 \in \{\{5\}\}$.
   (c) $4 \in \{\{4\}, 4\}$.
   (d) $\emptyset \in \{3\}$.
   (e) $\{2, 8\} \subseteq \{2, 8, 9\}$.
   (f) $\{3, 4\} \subseteq \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$.
   (g) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)(A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B))$.
   (h) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)((A \cup B) - C = A \cup (B - C))$.
   (i) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)(A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C)$.
   (j) $(\{\emptyset\} \subseteq \wp(A)), (\forall A)$.
   (l) $(\{\emptyset\} \in \wp(A)), (\forall A)$.
   (m) $\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. Mostre que se A é um conjunto finito com n elementos, então $\wp(A)$ é finito e tem 2^n elementos. Mostre também que A é infinito se, e somente se $\wp(A)$ é infinito.

3. Sejam A e B conjuntos. Determine se cada uma das afirmações abaixo são verdadeiras. Se sim, mostre, caso contrário, dê um contra exemplo.
   (a) $x \in A$ e $A \in B \Longrightarrow x \in B$.
   (b) $x \in A$ e $A \subseteq B \Longrightarrow x \in B$.
   (c) $x \in A$ e $A \not\subseteq B \Longrightarrow x \notin B$.
   (d) $A \subseteq B$ e $x \notin B \Longrightarrow x \notin A$.
   (e) $A \subseteq B \Longleftrightarrow \wp(A) \subseteq \wp(B)$.

4. Para A, B e C conjuntos dados, mostre que:
   (a) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$.
   (b) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$.
   (c) $A = B \Longleftrightarrow \wp(A) = \wp(B)$.
   (d) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
   (e) Se $B \subseteq A$, então $A \times A - B \times B = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$.
   (f) $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$.
   (g) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq B \Longleftrightarrow (C - B) \subseteq (C - A)$.
   (h) $\displaystyle\bigcap_{X \in \wp(A)} X = \emptyset$ e $\displaystyle\bigcup_{X \in \wp(A)} X = A$.

5. Sejam A, B e C conjuntos. Para cada uma das afirmações abaixo, mostre ou dê um contra-exemplo:
   (a) $(A - B) \cup C = (A \cup B \cup C) - (A \cap B)$.
   (b) $(A \cup C) - B = (A - B) \cup (C - B)$.
   (c) $(A \cup B) - (A \cap B \cap C) = [A - (B \cap C)] \cup [B - ((A \cap C))]$.
   (d) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$.
   (e) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.

(f) $A \subseteq C$ e $B \subseteq C \Longrightarrow (A \cup B) \subseteq C$.
(g) $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$.

6. Para conjuntos A e B, definimos a **diferença simétrica** de A e B, e denotamos por $A \triangle B$, como sendo o conjunto $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Mostre que:
   (a) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.
   (b) *(Comutativa)* - $A \triangle B = B \triangle A$.
   (c) *(Associativa)* - $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
   (d) *(Elemento Neutro)* - Existe um conjunto Φ tal que, para todo conjunto A tem-se que $A \triangle \Phi = A$.
   (e) *(Elemento Inverso)* - Para cada conjunto A, existe um conjunto B tal que $A \triangle B = \Phi$.
   (f) Mostre que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

7. Sejam A, B e E conjuntos tais que $E \neq \emptyset$. Mostre que se $A \times E = B \times E$, então $A = B$.

8. Sejam A e B conjuntos tais que $A \neq B$. Suponha que E seja um conjunto tal que $A \times E = B \times E$. Mostre que $E = \emptyset$.

9. Em cada um dos casos abaixo, considere a família infinita de conjuntos $\{B_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ e determine $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$.
   (a) $B_i = \{0, 1, 2, 3, ..., 2i\}$.
   (b) $B_i = \{i - 1, i, i + 1\}$.
   (c) $B_i = \left[\dfrac{3}{i}, \dfrac{5i+2}{i}\right] \bigcup \{10 + i\}$.
   (d) $B_i = \left[-1, 3 + \dfrac{1}{i}\right] \bigcup \left[5, \dfrac{5i+1}{i}\right]$.

10. Sejam I e J conjuntos tais que $J \subseteq I$, e $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família indexada de conjuntos.
    (a) Mostre que $\bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.
    (b) Mostre que $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{j \in J} A_j$.

11. Determine:
    (a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$.
    (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-1 - 1/n, 1 + 1/n)$.
    (c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-1/n, 1/n)$.

12. Sejam A um conjunto e $\mathcal{C} = \{B_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ uma família de conjuntos. Mostre que:
    (a) $A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$.
    (b) $A \cup \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_\gamma)$.