

Transformada Discreta de Cosseno: uma aplicação da Álgebra Linear na compressão de imagens do formato JPEG

Prof. Miguel Frasson

28 de agosto de 2013

Apresentamos como é feita a compressão de imagens com perdas como implementada no formato JPEG, um dos formatos de imagens mais usados na atualidade para fotos. Faremos em detalhe a *Transformada Discreta de Cosseno*, uma interessante aplicação da Álgebra Linear na computação, o núcleo do processo de compressão do JPEG.

Notação. Vamos denotar o produto escalar de dois vetores v e u por $\langle v, u \rangle$, por esta notação ser mais cômoda para somatórios.

Sumário

1	Passos da compressão JPEG	1
2	Transformada Discreta de Cosseno (DTC)	2
2.1	DTC unidimensional	3
2.2	DCT bidimensional	5
3	Um exemplo	7
A	Código fonte de tudo e créditos	10
	Referências	10

1 Passos da compressão JPEG

O tratamento da imagem é feito seguindo os seguintes passos (ver [1, 2]).

- A representação de cores é convertida de RGB (usada em monitores) para YC_bC_r , consistindo em uma componente de *brilho* Y e duas componentes de cores C_b e C_r (b e r de *blue* e *red*). Neste passo aparece por primeira vez a conversão por transformações lineares, mas que não trataremos aqui. Este passo às vezes é omitido.

- A resolução dos dados de cores é reduzida, usualmente, pela metade. Isto reflete o fato de que o olho é menos sensível a detalhes finos de cor do que de brilho.
- A imagem é dividida em blocos de 8×8 pixels, e a cada bloco é aplicada a *Transformada Discreta de Cosseno* [3] com sigla DCT, do inglês. *Este é o passo mais importante e será explicado em detalhe. Usa fortemente as bases ortogonais da Álgebra Linear.*

Na terminologia da transformada, o espaço dos dados iniciais são chamados de dados espaciais e os resultados após a transformada, em dados de frequência.

- A visão humana é muito mais sensível a pequenas variações de cor e brilho em áreas maiores do que à variações de brilho em altas frequências. Assim, as amplitudes dos componentes de frequência são “quantizadas”, isto é, reescaladas usando um sistema de pesos, onde pesos maiores são aplicados a frequências menores. Portanto a magnitude dos componentes de alta frequência são guardadas com precisão menor que componentes de baixas frequências. Aqui entra a qualidade da compactação. A configuração de qualidade do codificador (por exemplo 50% ou 95% numa escala de 0 a 100%) afeta a extensão com a qual cada componente de frequência é reduzida. Se uma configuração de baixa qualidade é usada, os componentes de alta frequência são todos descartados.

A matriz de quantização é gravada no início do arquivo JPEG para posterior desquantização quando a imagem for lida por outra aplicação.

- Os dados resultantes para todos os blocos 8×8 , que tipicamente são matrizes onde os números significativos estão no canto superior esquerdo, e com aspecto de matriz esparsa, são novamente compactados com um algoritmo sem perdas, uma variante da codificação de Huffman e armazenados no arquivo JPEG.

2 Transformada Discreta de Cosseno (DTC)

A DCT foi desenvolvida em 1974 por N. Ahmed, T. Natarajan and K. R. Rao [3]; ela é semelhante à transformada de Fourier (para funções periódicas) no sentido de que ela produz um tipo de espectro de espaço-frequência. Existem várias variantes da DTC — aqui estudaremos a DTC-II, mais usada.

Espera-se que a maioria das amostras de dados reais (por exemplo uma linha de cores de pixels em uma imagem) tenham valores com uma transição quase contínua de uma entrada para sua vizinha. O funcionamento da DCT está na escolha de uma base onde o primeiros elementos tem entradas vizinhas com pouca variação de valores (isto é, tem baixa frequência de variação) e os últimos tem entradas vizinhas com grandes variações (alta frequência). Assim, ao escrevermos os dados de amostra como combinação linear da base, é de se esperar que os coeficientes de maior magnitude sejam os primeiros, e que os últimos coeficientes sejam praticamente nulos, podendo ser desprezíveis.

Na linguagem da Álgebra linear, o que ocorre é uma mudança de bases da base canônica para outra base, ortonormal, em que cada elemento desta base representa a discretização do cosseno de uma determinada frequência.

A partir de agora, fixemos $N \in \mathbb{N}$, que fixa a dimensão do espaço de amostragem.

2.1 DTC unidimensional

Começaremos com a DTC unidimensional. Dado $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, à frequência $n\pi/N$, associamos o vetor coluna que interpola a função $\cos(\frac{n\pi}{N}t)$, dividido por sua norma. Mais precisamente, seja o vetor

$$v_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{N} \frac{1}{2}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(N-1 + \frac{1}{2}\right)\right) \right)^T. \quad (1)$$

Na Figura 1 vemos as entradas de cada vetor v_n para o caso $N = 8$.

Queremos mostrar que $C = \{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ é uma base ortogonal. Para isto, basta mostrar que $\langle v_n, v_m \rangle = 0$. Antes, precisamos de um resultado auxiliar.

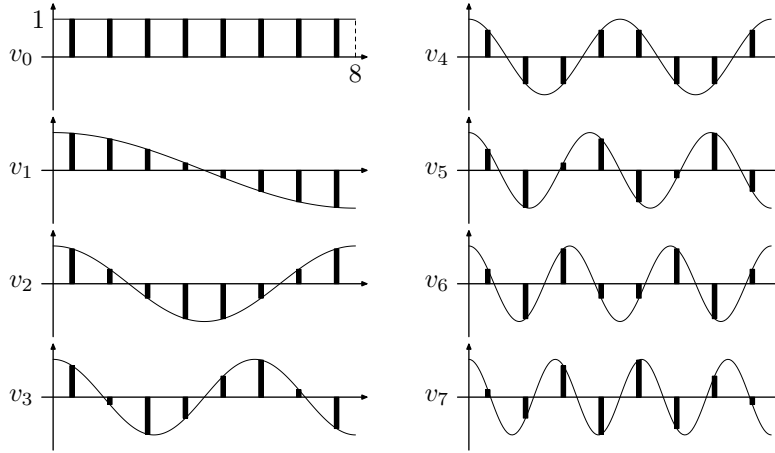


Figura 1: Os vetores ortogonais v_n para o caso $N = 8$, obtidos pela interpolação dos cossenos nas diversas frequências.

Lema 1. *Seja $N > 0$ inteiro e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) = \begin{cases} N, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração. O caso $n = 0$ é trivial. Suponha $n \neq 0$. Recordando as identidades

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \operatorname{Re} e^{i\theta}, \\ \operatorname{Re} \bar{w} &= \operatorname{Re} w \implies \operatorname{Re}(\bar{w} - w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{C}, \\ z^N - 1 &= (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

e definindo os números complexos $w = \exp(\frac{in\pi}{2N})$ e $z = \exp(\frac{in\pi}{N}) = w^2$, de forma que $z^N = e^{iN\pi} = (-1)^N$ e $|w| = 1$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{in\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\exp\left(\frac{in\pi}{2N}\right)}_w \underbrace{\exp\left(\frac{in\pi}{N}k\right)}_{z^k} \\
&= \operatorname{Re} w(1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}) = \operatorname{Re} w \frac{z^N - 1}{z - 1} \\
&= \operatorname{Re} w \frac{(z^N - 1)(\bar{z} - 1)}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} = \frac{(-1)^N - 1}{|z - 1|^2} \operatorname{Re} w(\bar{z} - 1) \\
&= \frac{(-1)^N - 1}{|z - 1|^2} \operatorname{Re}(\underbrace{w\bar{w}}_{|w|^2=1} \bar{w} - w) = \frac{(-1)^N - 1}{|z - 1|^2} \operatorname{Re}(\bar{w} - w) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 2. *Sejam v_n , $n = 0, 1, \dots, N - 1$ dados por (1). Então*

$$\langle v_n, v_m \rangle = \begin{cases} N, & n = m = 0, \\ N/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Portanto a base $C = \{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ é ortogonal.

Demonstração. Sejam $n, m \in 0, 1, \dots, N - 1$. Podemos supor que $n \geq m$. Recordemos a identidade

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)).$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle v_n, v_m \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)(n + m)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)(n - m)\right) \tag{2}
\end{aligned}$$

Se $n = m = 0$, então $n + m = n - m = 0$ e portanto de (2) e do Lema 1, obtemos $\langle v_0, v_0 \rangle = N$. Se $n = m \neq 0$, então $n + m = 2n \neq 0$ mas $n - m = 0$ e portanto de (2) e do Lema 1, obtemos $\langle v_0, v_0 \rangle = N/2$. Se $n \neq m$, então $n + m \neq 0$ e $n - m \neq 0$, de onde vem $\langle v_n, v_m \rangle = 0$. \square

Observação 3. Motivado pelo Teorema 2, definimos a função $C_N(n) = \|v_n\|^2 = \langle v_n, v_n \rangle$, isto é,

$$C_N(n) = \begin{cases} N, & n = 0, \\ N/2, & n > 0. \end{cases}$$

Seja $V = \mathbb{R}^N$ e $x \in V$. Como B é base, existem escalares X_0, X_1, \dots, X_{N-1} tais que

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} X_k u_k.$$

Podemos calcular x_k pelo produto interno

$$\langle x, u_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} X_k u_k, u_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \underbrace{\langle u_k, u_n \rangle}_{\substack{1, k=n \\ 0, k \neq n}} = X_n. \quad (3)$$

Definimos então a DCT pela mudança de base da base canônica para a base C , ou seja, a DCT do vetor $x = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] \in \mathbb{R}^N$ é o vetor $DTC(x) = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]$. Nas referências sobre DCT em artigos com enfoque computacional, a fórmula para os componentes de frequência X_k é dada com o produto interno expandido explicitamente como em

$$X_n = \frac{1}{\|v_n\|} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad n > 0,$$

onde $\|v_0\| = \sqrt{N}$ e $\|v_n\| = \sqrt{N/2}$, $n > 0$.

2.2 DCT bidimensional

Caso os dados sejam mais convenientemente representados em forma matricial, podemos definir a DTC bidimensional compondo a DCT unidimensional nas linhas e depois nas colunas. Por exemplo, na DCT usada no padrão de imagens JPEG, usa-se a DTC bidimensional dada pela base ortogonal

$$\begin{aligned} C_2 &= \{V_{n,m} \in M_{8 \times 8}(\mathbb{R}) : 0 \leq n, m < 8\}, \\ V_{n,m} &= (a_{n,m}(i, j)) \quad \text{com} \\ a_{n,m}(i, j) &= \cos\left(\frac{n\pi}{8} \left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{8} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (4)$$

onde a norma $\|V\|$ e o produto interno $\langle U, V \rangle$ para $U, V \in M_{8 \times 8}(\mathbb{R})$, $U = (a_{i,j})$ e $V = (b_{i,j})$, são os usuais, dados por

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 a_{i,j} b_{i,j}, \quad \|U\| = \sqrt{\sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 (a_{i,j})^2} = \sqrt{\langle U, U \rangle}.$$

Na Figura 2 vemos cada uma das matrizes $v_{n,m}$ de C_2 representada como uma imagem de tamanho 8×8 .

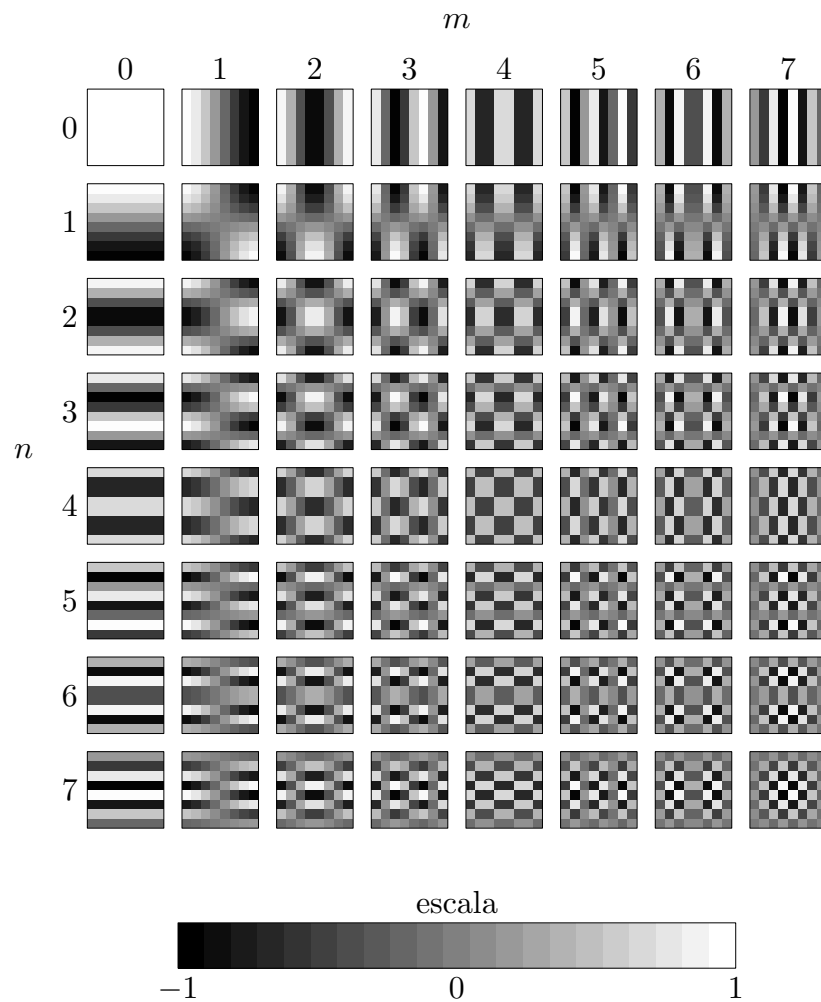


Figura 2: A base ortogonal dos 64 vetores $v_{n,m}$ da DTC bidimensional usadas no JPEG.

Também a base C_2 é ortogonal.

Teorema 4. Para $V_{n,m}, V_{k,\ell}$ dados em (4), vale

$$\langle V_{n,m}, V_{k,\ell} \rangle = \begin{cases} 0, & (n, m) \neq (k, \ell), \\ C_8(n)C_8(m), & (n, m) = (k, \ell). \end{cases}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle V_{n,m}, V_{k,\ell} \rangle &= \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{k\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left[\sum_{i=0}^7 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{k\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{j=0}^7 \cos\left(\frac{m\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Cada fator em (5) é um somatório idêntico ao de (2), e as discussões seguindo (2) implicam o que está no enunciado. \square

3 Um exemplo

Na figura 3 vemos selecionada uma região da imagem de 8×8 pixels. As escalas de cinza (de 0 a 255) estão mostradas na matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 89 & 97 & 101 & 101 & 113 & 206 & 231 & 235 \\ 85 & 85 & 89 & 89 & 109 & 231 & 235 & 235 \\ 85 & 81 & 85 & 89 & 105 & 215 & 239 & 239 \\ 105 & 101 & 101 & 101 & 113 & 239 & 243 & 243 \\ 178 & 186 & 190 & 186 & 194 & 231 & 239 & 243 \\ 235 & 239 & 239 & 243 & 243 & 239 & 243 & 243 \\ 235 & 239 & 235 & 235 & 231 & 239 & 231 & 239 \\ 231 & 231 & 231 & 231 & 227 & 227 & 227 & 227 \end{pmatrix}$$

Aplicando a DCT a A , obtemos $B = DTC(A) = (b_{i,j})$ onde

$$b_{i,j} = \frac{\langle A, V_{i,j} \rangle}{\|V_{i,j}\|}$$



Figura 3: Imagem original (com um quadrado selecionado para aplicarmos o exemplo) e abaixo os resultados após a compressão com matriz de quantização iguais respectivamente a $\frac{1}{2}Q$ e Q , dada em (6). Note que a segunda é praticamente igual à original. A terceira tem certos detalhes perdidos, como os parafusos nas vigas cinzas (sombas) embaixo da ponte, mas ainda assim com qualidade satisfatória.

ou em números

$$B = \begin{pmatrix} 1500.2 & -263.7 & 91.0 & 26.8 & -61.0 & 16.1 & 28.3 & -32.3 \\ -311.9 & -211.7 & 71.8 & 25.3 & -47.2 & 15.4 & 20.8 & -20.3 \\ 16.9 & 38.3 & -13.0 & -8.6 & 9.5 & -2.8 & -5.7 & 4.4 \\ 103.8 & 62.4 & -27.1 & -17.6 & 15.7 & -8.7 & -11.4 & 10.2 \\ -25.7 & -8.3 & 5.9 & -3.2 & -5.0 & 1.2 & 0.7 & -0.2 \\ -24.8 & -16.4 & 13.4 & 1.6 & -4.0 & 2.4 & 2.6 & -6.3 \\ 10.8 & 11.6 & -4.5 & -8.5 & 9.3 & 3.7 & -10.2 & 8.0 \\ 2.5 & 10.6 & -2.7 & -11.0 & 6.0 & -2.4 & -5.2 & 5.9 \end{pmatrix}$$

A esta matriz aplicaremos uma quantização por uma matriz típica $Q = (q_{i,j})$ do padrão JPEG. Esta matriz de quantização para luminância é dada em [1, p. 143].

$$Q = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

A matriz $C = (c_{i,j})$, gerada pela quantização de $B = (b_{i,j})$, é dada por

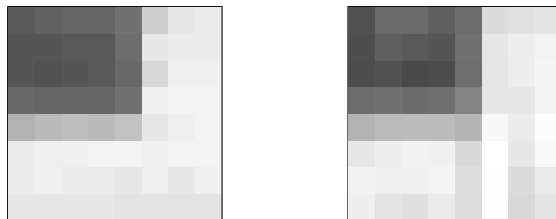
$$c_{i,j} = \text{round} \left(\frac{b_{i,j}}{q_{i,j}} \right)$$

e aparece abaixo:

$$C = \begin{pmatrix} 94 & -24 & 9 & 2 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ -26 & -18 & 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz esparsa será compactada com o algoritmo de Huffman (sem perdas) e armazenada no arquivo JPEG.

Para vermos a eficácia da compressão, aplicaremos as operações inversas para reconstruir uma aproximação de A (mantendo os valores em $[0, 255]$) e mostramos abaixo o retângulo 8×8 original e, ao lado, o produzido pela compressão descrita acima:



A Código fonte de tudo e créditos

Baixe o arquivo `jpeg.zip` que contém todos os arquivos necessários para gerar todos os “subprodutos” deste projeto, isto é, o *pdf* e o *html* do texto e os cálculos numéricos.

- Para gerar o PDF, foi usada a linguagem \LaTeX [4] (compilada com `pdflatex`). O arquivo é o `jpeg.tex`. Para gerar as figuras de alta qualidade, usamos o METAPOST [5], que tem como saída os arquivos vetoriais com extensão `mps` (eps que pode ser usado com `pdflatex`).
- O html foi convertido “no braço” a partir do arquivo \LaTeX , tendo em vista a possibilidade de usarmos MathJax [6] para renderizar as fórmulas.
- Os cálculos numéricos foram feitos usando a linguagem GNU Octave [7], semelhante ao MatLab, mas aquela é software livre. O arquivo `jpeg.m` lê o arquivo `ponte.pgm` e gera diversos arquivos `pgm` (Portable Graymap) [8], um formato de imagem fácil de programar por ser texto. Posteriormente, os arquivos foram convertidos para `png` com o editor de imagens Gimp [9].
- A imagem do riacho e ponte usada no exemplo (Figura 3) teve sua origem no antigo banco de dados de imagens teste da *USC-SIPI*. O arquivo original é a imagem 5.2.10, na seção Miscellaneous.

Referências

- [1] ITU-T.81 – Recomendação T.81 do International Telecommunication Union (ITU) que define o formato JPEG, 1992.
<http://www.w3.org/Graphics/JPEG/itu-t81.pdf>
- [2] Wikipedia, verbete JPEG (em inglês) <http://en.wikipedia.org/wiki/JPEG>
- [3] Ahmed, N., Natarajan, T., Rao, K. R. Discrete Cosine Transform. *IEEE Transactions on Computers* C-23 (1): 90-93. 1974. DOI: 10.1109/T-C.1974.223784.
- [4] \LaTeX – a document preparation system.
- [5] The METAPOST system – a picture-drawing language.
- [6] MathJax, an JavaScript display engine for mathematics.
- [7] GNU Octave – a high-level interpreted language, primarily intended for numerical computations.
- [8] Wikipedia – verbete Portable Graymap (pgm), em inglês.
- [9] Gimp, the GNU Image Manipulation Program.