Lista 4 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ onde f e γ são dados:

a) $f(z) = |z|$ e $\gamma = \{z(\theta) = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

b) $f(z) = \sqrt{z}$ e $\gamma = \{z(\theta) = re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$.

c) $f(z) = 2x - y + ix^2$ ao longo do segmento retilíneo de zero a $1 + i$.

d) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

e) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

f) $f(z) = y - x^2$ ao longo do segmento da origem ao ponto $(2, 0)$, seguido do segmento de $(2, 0)$ a $(2, 1)$.

g) $f(z) = \log(z)$ e γ é um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.

Exercício 2 Mostre que $\left|\int_\gamma \dfrac{dz}{1+z^2}\right| \leq \dfrac{3\pi}{16}$, onde γ é o arco de um círculo situado no primeiro quadrante, centrado na origem e de raio 3.

Exercício 3 Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ onde f e γ são dados:

a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-3}$ e γ é o círculo $|z| = 2$.

b) $f(z) = \dfrac{3ze^z}{z^2+3}$ e γ é o círculo $|z| = 5/4$.

c) $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2-9}$ e γ é o círculo $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

d) $f(z) = \dfrac{ze^z}{\log(2z+3)}$ e γ é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.

e) $f(z) = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}$ e γ é o círculo $|z| = 1$.

Exercício 4 Calcule a integral da função $f(z) = \dfrac{1}{z}$ sobre o contorno C que vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Exercício 5 Mostre que $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - z + iz - i} = 0$.

Exercício 6 Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-a}$, onde C é qualquer curva simples fechada e $z = a$ está (a) fora da região C e da região limitada por C, (b) pertence à região limitada por C.

Exercício 7 Mostre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\operatorname{sen}(x)dx = \frac{1}{2}$.

Exercício 8 Seja $B(z, \overline{z})$ uma função contínua a valores complexos, com derivadas parciais contínuas numa região $\mathcal{R}$ e sobre sua fronteira C, onde $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$. Prove que o Teorema de Green pode ser enunciado da seguinte forma:

$$\oint_C B(z, \overline{z}) dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial B}{\partial \overline{z}} dx dy.$$

Gabarito

Exercício 1 a) $-2r^2$ b) $4r\sqrt{r}/3i$ c) $(1+5i)/6$ g) $2\pi i$

Exercício 3 a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) 0

Exercício 4 $i\pi$

Exercício 6 a) zero b) $2\pi i$