Respostas da $2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Variáveis Complexas

Professora: Denise de Mattos **17/08/06**

1. **a.** As três raízes cúbicas de $z_0 = 1$ são: 1, $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = 2\pi/3$.

   b. As três raízes cúbicas de $z_0 = 1 + i$ são: $w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$, $w_1 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = 2\pi/3$.

   c. As duas raízes quadradas de $z_0 = i$ são: $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = \pi$.

   d. As duas raízes quadradas de $z_0 = -1$ são: $w_0 = i$ e $w_1 = -i$. As raízes estão espaçadas de um ângulo de $\theta = \pi$.

   e. As quatro raízes quartas de $z_0 = 2i$ são: $w_0 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\pi/8) + i\,\text{sen}(\pi/8))$,
   $w_1 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(5\pi/8) + i\,\text{sen}(5\pi/8))$, $w_2 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(9\pi/8) + i\,\text{sen}(9\pi/8))$ e
   $w_3 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(13\pi/8) + i\,\text{sen}(13\pi/8))$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = \pi/2$.

   f. As três raízes cúbicas de $z_0 = \frac{-8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}i$ são: $w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $w_1 = 2\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$ e $w_2 = 2\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = 2\pi/3$.

   g. As duas raízes quadradas de $z_0 = 3 - 4i$ são: $w_0 = -2 + i$ e $w_1 = 2 - i$. Nesse caso, é mais simples resolver a equação $w^2 = (x + iy)^2 = 3 - 4i$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = \pi$

   h. As raízes quartas de $z_0 = -8 + 8\sqrt{3}i$ são: $w_0 = \sqrt{3} + i$, $w_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $w_2 = -\sqrt{3} - i$ e $w_3 = 1 - i\sqrt{3}$. As raízes estão espaçadas de um ângulo $\theta = \pi/2$

2. **a.** As três raízes cúbicas de $z_0 = -64$ são: $w_0 = 2 + 2\sqrt{3}i$, $w_1 = -4$ e $w_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

   b. As duas raízes quadradas de $z_0 = -16i$ são: $w_0 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ e $w_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

   c. As duas raízes quadradas de $z_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ são: $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $w_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

   d. As duas raízes quadradas de $z_0 = \frac{1}{-4i}$ são $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ e $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$.

3. A circunferência tem centro na origem e raio 3, logo ela intercepta os eixos coordenados nos pontos $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$ e $(0, -3)$. Assim, os outros três vértices são representados pelos números complexos: $3, -3$ e $-3i$.

4. Os números complexos são $i+w_0 = i+2i = 3i$, $i+w_1 = i-\sqrt{3}-i = -\sqrt{3}$e $i+w_2 = i+\sqrt{3}-i = \sqrt{3}$, onde w_0, w_1 e w_2 são as raízes cúbicas de $z_0 = -8i$. Geometricamente, os afixos: $(\pm\sqrt{3}, 0)$ e $(0, 3)$, desses números complexos representam um triângulo equilátero.

5. Temos que $w_0 = -2$ é uma raiz sexta de z_0. Fazendo $w_k = w_0\omega^k = -2\omega^k$, com $k = 1, \cdots, 5$, onde $\omega = \cos(2\pi/6) + i\,\text{sen}(2\pi/6)$ é uma raiz sexta da unidade, obtemos $w_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $w_2 = 1 - \sqrt{3}i$, $w_3 = 2$, $w_4 = 1 + i\sqrt{3}$ e $w_5 = -1 + i\sqrt{3}$, as quais são as outras cinco raízes sextas de z_0.

6. As raízes quartas de $z_0 = -4$ são: $w_0 = 1 + i$, $w_1 = -1 + i$, $w_2 = -1 - i$ e $w_3 = 1 - i$. Portanto, $w^4 + 4 = [w-(1+i)][w-(1-i)][w-(-1+i)][w-(-1-i)]$. Efetuando o produto dos dois primeiros fatores, obtemos o polinômio $w^2 - 2w + 2$. Analogamente, efetuando o produto dos dois últimos fatores, obtemos $w^2 + 2w + 2$. Portanto $w^4 + 4 = (w^2 - 2w + 2)(w^2 + 2w + 2)$, que é um produto de dois polinômios de grau 2 com coeficientes reais.

7. **a.** As raízes cúbicas de $z_0 = 4\sqrt{3} - 4i$ são:

$w_0 = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{18}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{18})\right]$, $w_1 = 2\left[\cos(\frac{11\pi}{18}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{11\pi}{18})\right]$
e $w_2 = 2\left[\cos(\frac{23\pi}{18}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{23\pi}{18})\right]$.

b. As raízes quartas de $z_0 = 128 + 128\sqrt{3}i$ são:

$w_0 = 4\left[\cos(\frac{\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{12})\right]$, $w_1 = 4\left[\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{12})\right]$,
$w_2 = 4\left[\cos(\frac{13\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{13\pi}{12})\right]$ e $w_3 = 4\left[\cos(\frac{19\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{19\pi}{12})\right]$.

c. As raízes quintas de $z_0 = 16\sqrt{2} + \frac{32}{\sqrt{2}}i$ são:

$w_0 = 2\left[\cos(\frac{\pi}{20}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{20})\right]$, $w_1 = 2\left[\cos(\frac{9\pi}{20}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{9\pi}{20})\right]$,
$w_2 = 2\left[\cos(\frac{17\pi}{20}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{17\pi}{20})\right]$, $w_3 = 2\left[\cos(\frac{25\pi}{20}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{25\pi}{20})\right]$
e $w_5 = 2\left[\cos(\frac{33\pi}{20}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{33\pi}{20})\right]$.

d. As raízes sextas de $z_0 = \frac{1+i}{1-i} = i$ são

$w_0 = \left[\cos(\frac{\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{12})\right]$, $w_1 = \left[\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{12})\right]$,
$w_2 = \left[\cos(\frac{9\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{9\pi}{12})\right]$, $w_3 = \left[\cos(\frac{13\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{13\pi}{12})\right]$,
$w_4 = \left[\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{17\pi}{12})\right]$ e $w_5 = \left[\cos(\frac{21\pi}{12}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{21\pi}{12})\right]$.

8. **Sugestão:** denote por $S = 1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1}$ e multiplique essa igualdade por w, para concluir que $S = \frac{1-w^n}{w-1} = 0$.

11 a. É o interior do ramo esquerdo da hipérbole $|z-2| - |z+2| = 3$.

b. É uma elipse com focos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

d. É a faixa delimitada pelo eixo real e pela reta $y = -1$, incluindo o eixo real.

e. É a hipérbole com vérices $\pm\sqrt{\alpha}$.

f. É o semi-plano esquerdo, delimitado pelo eixo imaginário (não incluindo esse eixo) .

g. Solução: em coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$

Trabalharemos primeiro com a equação $|z^2 - 1| = 1$.

$|z^2 - 1| = 1 \Rightarrow |x^2 - y^2 - 1 + 2xyi| = 1 \Rightarrow$
$(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 1 \Rightarrow [r^2\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 1]^2 + (4r^2\cos^2\theta)(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta) = 1 \Rightarrow$
$\left[r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 1\right]^2 + r^4(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) = 1 \Rightarrow$
$(r^2\cos(2\theta) - 1)^2 + r^4\,\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{sen}(2\theta) = 1 \Rightarrow$
$r^4\cos^2(2\theta) - 2r^2\cos(2\theta) + 1 + r^4\,\mathrm{sen}^2(2\theta) = 1 \Rightarrow$
$r^4(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) = 2r^2\cos(2\theta) \Rightarrow$
$r^4 = 2r^2\cos(2\theta) \Rightarrow$
$r^2 = 2\cos(2\theta)$, que é a equação de uma lemniscata: $r^2 = a\cos(2\theta)$.

Assim a equação $|z^2 - 1| < 1$, implica que $r^2 < 2\cos(2\theta)$ e a região procurada são os pontos que estão no interior da região limitada pela lemniscata $r^2 = 2\cos(2\theta)$.

h. É a região delimitada pela parábola de equação $x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.