$5^{\underline{a}}$ **Lista de Exercícios de Variáveis Complexas**

Professora: Denise de Mattos **25/09/06**

1. Use a fórmula integral de Cauchy para calcular $\int_\gamma \frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz$, onde:

   a) γ é a circunferência de centro $z_0 = 0$ e raio $r = 1$. **R:**$-\frac{2\pi i}{3}$

   b) γ é a circunferência de centro $z_0 = 3$ e raio $r = 1$. **R:**$(9 + e^3)\frac{2\pi i}{3}$

2. Mostre que a função $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$, onde:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{cz}-1}{z} & , z \neq 0 \\ c & , z = 0 \end{cases}$$

3. Seja $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Mostre que essa série converge uniformemente em $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$, $0 \leq r < 1$.
   Sugestão: Use o teste M de Weierstrass.

4. Determine a série de Taylor de $f(z)$ em torno de z_0 e calcule o seu raio de convergência:

   a) $\operatorname{Log}(1+z)$; $z_0 = 0$ **b)** $\dfrac{z}{z-1}$; $z_0 = 0$ **c)** $\frac{1}{z}$; $z_0 = 1$ **d)** $\operatorname{senh}(z)$; $z_0 = 0$
   e) $\cosh z$; $z_0 = 0$ **f)** e^{2z}; $z_0 = 0$ **g)** e^{z+1}; $z_0 = 1$

   Obs. No item (a) considere o ramo principal do Log.

   R: (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, $|z| < 1$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} -z^n$; $|z| < 1$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, |z-1| < 1$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, z \in \mathbb{C}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n, z \in \mathbb{C}$, (g)$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(z-1)^n, z \in \mathbb{C}$

5. Mostre que se $|z| < 1$, $\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

6. Determine os quatro primeiros termos da série de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados:

   a) $\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z}$; $z_0 = 1$ **b)** $z^2 e^z$; $z_0 = 0$ **R:** (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+2}$

   R: (a) $\sin(1) + [\cos(1) - \operatorname{sen}(1)](z-1) + \left[\frac{\operatorname{sen}(1)}{2} - \cos(1)\right](z-1)^2 + \left[\frac{5}{6}\cos(1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1)\right](z-1)^3 + \cdots$

7. **a)** Diferencie a série $\frac{1}{1-z}$ para mostrar que $\dfrac{1}{(1-z)^3} = 1/2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n$, se $|z| < 1$.

   b) Mostre que $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}$, se $|z| < 1$.

   (Sugestão: Use a série geométrica $\dfrac{1}{1-w} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$, com $w = -z^2$)

8. Encontre a série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ no anel:

   a) {z; $0 < |z| < 1$}. **R:** $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
   b) {z; $0 < |z-1| < 1$}. **R:** $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

9. Encontre a série de Laurent de $f(z)$ em torno de z_0 :

   (a) $\operatorname{sen}(1/z)$, $z_0 = 0$; **(b)** $\dfrac{e^z}{z^2}$, $z_0 = 0$; **(c)** $\dfrac{e^z - \cos(z-1)}{z-1}$, $z_0 = 1$; **(d)** $\dfrac{\operatorname{senhz}}{z^2}$, $z_0 = 0$.

   R: (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-1}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e}{n!}(z-1)^{n-1} - \frac{(-1)^n(z-1)^{2n-1}}{(2n)!}\right]$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{(2n-1)!}$

10. **a)** Encontre a série de Laurent de $f(z) = z^3 \text{sen}\,(1/z)$.

    b) Use o item **a**) para calcular $\int_\gamma z^3 \text{sen}\,(1/z)\, dz$, onde $\gamma(t) = e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

11. Encontre a série de Laurent de $f(z)$, com z_0, r_1, r_2 como indicado:

    a) $\dfrac{z+1}{z}$; $\quad z_0 = 0, r_1 = 0, r_2 = \infty$. R. $\frac{1}{z} + 1$

    b) $\dfrac{z}{z^2+1}$; $\quad z_0 = i, r_1 = 0, r_2 = 2$. **R:** $\frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{4i}\left(1 - \frac{(z-i)}{2i} + \left[\frac{(z-i)}{2i}\right]^2 + \cdots\right)$

    c) $\dfrac{1+2z}{z^2+z^3}$; $\quad z_0 = 0, r_1 = 0, r_2 = 1$. **R:** $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} - 1 + z + \cdots + (-1)^{n+1} z^{n-2} + \cdots$

12. Classifique as singularidades de $f(z)$ em z_0:

    (a) $\dfrac{e^z - 1}{z^2}$; $\quad z_0 = 0$. **R:** Pólo simples.

    (b) $\dfrac{(e^z-1)^2}{z^2}$. ; $\quad z_0 = 0$. **R:** Singularidade removível.

    (c) $\dfrac{z}{z^2} + \dfrac{3}{z-\pi}$. ; $\quad z_0 = 0$ e $z_0 = \pi$. **R:** Pólo simples.

13. Mostre que se z_0 é um zero de ordem k de uma função analítica $f(z)$, então z_0 é uma singularidade removível de $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^k}$.

14. Calcule $\text{Res}(f, z_0)$ onde:

    a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$; $\quad z_0 = i$. R. $\frac{1}{2}$ $\qquad$ **b)** $f(z) = \dfrac{z}{z^4-1}$; $\quad z_0 = 1$. R. $\frac{1}{4}$

    c) $f(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\text{sen}\, z}$; $\quad z_0 = 0$. R. 1 $\qquad$ **d)** $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$; $\quad z_0 = 0$. R. $-\frac{1}{2}$

15. Mostre que todos os pontos singulares de $f(z)$ são pólos, determine a sua ordem e calcule $\text{Res}(\text{f}, \text{z}_0)$.

    a) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$. R. pólo simples, Resíduos: $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ $\qquad$ **b)** $\text{tg}\,\text{h}\,(z)$. R. pólo simples, Resíduo: 1

16. Determine o resíduo de $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ em z_0 e calcule $\int_\gamma f(z) dz$:

    (a) $f(z) = \text{tg(z)}$; $z_0 = \pi/2$ e γ é uma circunferência com centro em $z_0 = \pi/2$ e raio $r = 1$. **R:** $-2\pi i$.

    (b) $f(z) = \text{cotg(z)}$; $z_0 = 0$ e γ é uma circunferência com centro em $z_0 = 0$ e raio $r = 1$. **R:** $2\pi i$.

    (c) $f(z) = \text{tgh(z)} = \dfrac{\text{senh(z)}}{\text{cosh(z)}}$; $z_0 = \frac{\pi}{2} i$ e γ é uma circunferência com centro em $z_0 = \frac{\pi}{2} i$ e raio $r = 1$. **R:** $2\pi i$.

    (d) $f(z) = \dfrac{e^z}{\text{senz}}$; $z_0 = 0$ e γ é uma circunferência com centro em $z_0 = 0$ e raio $r = 2$. **R:** $2\pi i$.

17. Discuta as singularidades de $f(z) = \frac{1}{\cos(1/z)}$. **R.** Tem pólos simples em $z = \frac{2}{(2n+1)\pi}, n \in \mathbb{Z}$ e $z = 0$ não é singularidade isolada de $f(z)$.

18. Verifique que a função $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}$ possui pólo duplo em $z_1 = -1$ e pólos simples em $z_2 = i$ e $z_3 = -i$ e use o Teorema do Resíduo para mostrar que $\int_\gamma f(z) dz = 0$, onde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

19. Calcule a integral $\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^n}$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$. **R:** $\frac{2\pi i e}{(n-1)!}$