$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Variáveis Complexas

Professora: Denise de Mattos **16/10/06**

1. Calcule as seguintes integrais ao longo da curva γ, usando uma parametrização da curva:

   a. $\int_\gamma x dz$, onde γ é o quadrado unindo os pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

   b. $\int_\gamma e^z dz$, onde γ é a parte da circunferência unitária unindo os pontos 1 a i, no sentido anti-horário.

   c. $\int_\gamma y dz$, onde γ é a reunião dos segmentos de reta unindo os pontos 0, i e $i+2$.

   d. $\int_\gamma \operatorname{sen}(2z)dz$, onde γ é o segmento de reta unindo os pontos $i+1$ e $-i$.

   e. $\int_\gamma ze^{z^2} dz$, onde γ é a circunferência unitária.

   f. $\int_\gamma \bar{z}dz$, onde γ é circunferência unitária percorrida no sentido anti-horário.

   g. $\int_\gamma (x^2 - y^2)dz$, onde γ é o segmento de reta unindo os pontos 0 a i.

2. Calcule $\int_\gamma (\bar{z})^2 dz$ ao longo dos seguintes caminhos unindo $(0,0)$ a (1,1):

   (a) γ **é o segmento de reta unindo** $(0,0)$ **a** $(1,1)$**.**

   (b) γ **é o segmento de reta unindo os pontos** $(0,0)$**,** $(1,0)$ **e** $(1,1)$**.**

   Em vista das suas respostas nos intens (a) **e** (b)**, a função** $f(z) = (\bar{z})^2$ **pode ser a derivada de qualquer função analítica** $F(z)$**?**

3. **Calcule as seguintes integrais:**

   a. $\int_{|z|=1} \frac{1}{|z|}dz$**.**

   b. $\int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right|$**.**

   c. $\int_\gamma z^2 dz$**, onde** $\gamma(t) = e^{it}\operatorname{sen}^3(t)$**,** $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$**.**

   d. $\int_\gamma z\sin(z^2)dz$**, onde** γ **é a circunferência unitária.**

   e. $\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz$**, onde** γ **é a circunferência unitária.**

   f. $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$**, onde** $\gamma(\theta) = 3 + e^{i\theta}$**,** $0 \le \theta \le 2\pi$**.**

   g. $\int_\gamma z^2 dz$**, onde** γ **é o segmento de reta unindo** $1+i$ **a** 2**.**

   h. $\int_\gamma \sqrt{z}dz$**, onde** γ **é a parte superior da circunferência unitária.**

   i. $\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz$**, onde** $\gamma(t) = 2 + e^{it}$**,** $0 \le t \le 2\pi$**.**

   j. $\int_\gamma \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz$**, onde** γ **é a circunferência** $|z| = 3$**. (Dica: use frações parciais, uma raiz do denominador é** $z = 2$**.)**

4. **Seja** γ **a parte superior da circunferência unitária. Dê uma estimativa para**

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{2+z^2}dz\right|.$$

5. **Seja A uma região simplesmente conexa tal que o ponto $z_0 = 0$ não pertence a A. Mostre que existe uma função analítica $F(z)$, que é única a menos da adição de múltiplos inteiros de $2\pi i$, tal que $e^{F(z)} = z$.**

6. **É verdade em geral que $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma \mathrm{f(z)dz}\right) = \int_\gamma \mathrm{Ref(z)dz}$? Se for verdadeiro, prove, se não dê um contra-exemplo.**

7. **Dê condições sobre uma curva fechada γ que garantam que $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$.**

8. **Para que curvas γ simples e fechadas se tem $\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1} dz = 0$?**

9. **Calcule a integral $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{ki\theta} d\theta$, para todo $k \geq 1$.**

10. **O Teorema de Cauchy é válido separadamente para as partes real e imaginária de $f(z)$? Se verdadeiro prove, se não dê um contra-exemplo.**

11. **Seja A uma região limitada pelo eixo real e pela curva $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, onde $R > 0$ é fixado. Seja $f(z) = \frac{e^{z^2}}{(2R-z)^2}$. Mostre que para qualquer curva fechada γ em A, $\int_\gamma f(z) dz = 0$. Justifique sua resposta.**

12. **Use o Teorema de Cauchy-Goursat para justificar por que $A = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 4\}$ não é simplemente conexo.**

13. **Calcule as integrais: $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$ e $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^2} dz$, onde γ é a circunferência unitária.**

14. **Calcule a integral $\int_\gamma \frac{e^z+z}{z-2}$, onde:**

    a. **γ é a circunferência unitária.**

    b. **γ é a circunferência de centro $z = 0$ e raio $r = 3$.**

15. **Calcule as integrais:**

    a. **$\int_\gamma \frac{z^2}{z-1} dz$, γ é a circunferência de centro $z = 0$ e raio $r = 2$.**

    b. **$\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$, onde γ é a circunferência de centro $z = 0$ e raio $r = 2$.**

    c. **$\int_\gamma \frac{|z|e^z}{z^2} dz$, onde γ é a circunferência de centro $z = 0$ e raio $r = 2$.**

    d. **$\int_\gamma \frac{1}{z^2-2i} dz$, onde γ é a circunferência $|z - 1| = 2$.**

    d. **$\int_\gamma \frac{1}{z^2+2z-3}$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$.**