$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Variáveis Complexas

Professora: Denise de Mattos **07/08/06**

1. Expresse os seguintes números complexos na forma $a + ib$:

   a. $\frac{1}{i}$ **b.** $\frac{1}{1+i}$ **c.** $\frac{3+4i}{2-i}$

   d. $\frac{1+i}{1-i}$ **e.** $\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$ **f.** $\left(1 + \frac{3}{1+i}\right)^2$

   g. $\frac{i^9}{4-3i}$ **h.** $\frac{1+i}{(1-i)^2}$

   Respostas: (a)$-i$ (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$ (d) i (e) $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ (f) $4 - \frac{15}{2}i$ (g) $-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ (h) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

2. Mostre que $(1+i)^2 = 2i$ e use este fato para provar que:

$$\frac{(1+i)^{80} - (1+i)^{82}}{i^{96}} = 2^{40} - 2^{41}i.$$

3. Calcule as seguintes potências de i:

   a. i^{76} **b.** i^{110} **c.** i^{97} **d.** i^{503}

   R. (a) 1 (b) -1 (c) i (d) $-i$

4. Verifique condições necessárias e suficientes para que $z = \frac{a+bi}{c+di}$, onde $c + di \neq 0$ seja:

   a. Um número real.

   b. Um número imaginário puro.

5. Encontre a parte real e a parte imaginária de $z = x + iy$:

   a. $\frac{1}{z^2}$ **b.** $\frac{1}{3z+2}$ **c.** $\frac{z+1}{2z-5}$ **d.** z^3

   Respostas:

   (a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. (b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{3x+2}{(3x+2)^2+9y^2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{-3y}{(3x+2)^2+9y^2}$

   (c) $\mathrm{Re}z = \frac{2x^2-3x+2y-5}{(2x-5)^2+4y^2}$; $\mathrm{Im}z = \frac{-7y}{(2x-5)^2+4y^2}$ (d) $\mathrm{Re}z = x^3 - 3xy^2$; $\mathrm{Im}z = 3x^2y - y^3$.

6. Efetue as seguintes operações:

   a. $(6+7i)(1+i)$. (R. $-1 + 13i$)

   b.$(5+4i)(1-i) + (2+i)i$. (R. $8 + i$)

   c. $(1+2i)^2 - (3+4i)$. (R. -6)

7. Determine $x, y \in \mathbb{R}$ tais que:

   a. $2 + 3yi = x + 9i$. (R. $x = 2$ e $y = 3$)

   b. $(x+yi)(3+4i) = 7 + 26i$. (R. $x = 5$ e $y = 2$)

   c. $(x+yi)^2 = 4i$ (R. $x = 1$ e $y = 1$ ou $x = -1$ e $y = -1$)

8. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 13 + 6i$. (R. $z = \pm 2 + 3i$).

9. Em cada um dos itens abaixo, determine o módulo, o argumento principal, a representação polar e a representação geométrica de z.

   a. $z = 4$ **b.** $z = 1 + i\sqrt{3}$ **c.** $z = 3i$
   d. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ **e.** $z = -5$ **f.** $z = -2i$
   g. $z = -5 - 5i$ **h.** $z = 2 - 2i$

10. Usando a forma polar de um número complexo, mostre que:

    a. $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + 2i\sqrt{3}$ **b.** $\frac{5i}{2+i} = 1 + 2i$

    c. $(1 + i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + i\sqrt{3})$ **d.** $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$

11. Sejam z_0 um número complexo fixado e R uma constante positiva. Explique por que, quando z satisfaz qualquer uma das seguintes equações, então z pertence à circunferência de raio R, com centro em $-z_0$.

    a. $|z + z_0| = R$ **b.** $z + z_0 = R(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$, onde ϕ é real.

    c. $z\overline{z} + \bar{z}_0 z + z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2$.

12. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{z} = -2zi$

13. Mostre que:

    a. Se $\bar{z} = z$, então z é real. **b.** Se $z^2 = (\bar{z})^2$, então ou z é real ou z é imaginário puro.

14. Seja $\frac{x-iy}{x+iy} = a + ib$. Mostre que $a^2 + b^2 = 1$.

15. Simplifique as expressões:

    a.$(1 + i)^4$ **b.**$(-i)^{-1}$

    Respostas: (a)-4 (b)i

16. Represente geometricamente no plano complexo os seguintes subonjuntos de $\mathbb{C}$:

    a. $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 2\}$ **b.** $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 3\}$
    c. $\{z \in \mathbb{C}; |z - i| = 1\}$ **d.** $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re(z)} = 0\}$
    e. $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im(z)} = 0\}$ **f.** $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re(z)} \geq 1 \text{ e } \mathrm{Im(z)} \geq 2\}$
    g. $\{z \in \mathbb{C}; |z - (1 + i)| \leq 1\}$

17. Mostre que:

    a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ **b.** $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$
    c. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ **d.** $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
    e. $\overline{\overline{z}} = z$ **f.** $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$

18. Mostre que:

    a. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ **b.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, se $z_2 \neq 0$.
    c. $|\mathrm{Re(z)}| \leq |\mathrm{z}|$ **d.** $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
    e. $|\bar{z}| = |z|$