portanto,

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z-z} = 2\pi i = \oint_C \frac{dz}{z-z},$$

onde C é qualquer contorno fechado envolvendo o ponto a uma vez no sentido positivo.

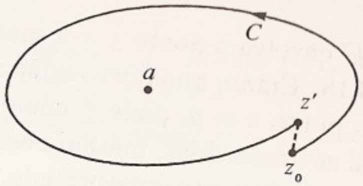

Fig. 3.19

3.13. Exemplo. Vamos calcular a integral da função $\log z$ ao longo de um contorno C_1 contido nos 4º, 1º e 2º quadrantes, com ponto inicial $z = -i$ e ponto final $z = -1$, como ilustra a Fig. 3.20. Lembramos que $(z\log z - z)' = \log z$, e que, qualquer que seja o ramo escolhido para o logaritmo, $\arg(-1) = \arg(-i) + 3\pi/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \log z dz &= [z\log z - z]_{C_1} \\
&= (-1)i\arg(-1) - (-1) - [(-i)i\arg(-i) - (-i)] \\
&= -i\left[\arg(-i) + \frac{3\pi}{2}\right] + 1 - \arg(-i) - i \\
&= 1 - i\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) - (1+i)\arg(-i).
\end{aligned}$$

Esta expressão nos mostra que o resultado depende de $\arg(-i)$, ou seja, depende do ramo escolhido para o logaritmo. Costuma-se fazer essa escolha dizendo, simplesmente, como deve ser $\log z$ para certo valor de z. Por exemplo, basta dizer que $\log z$ é real quando z for positivo (ou que $\log 1 \doteq 0$) para fixar o argumento de $-i$ em $-\pi/2$; ou, se dissermos que $\log 1 = 2\pi i$,

então $\arg(-i) = 3\pi/2$; e assim por diante.

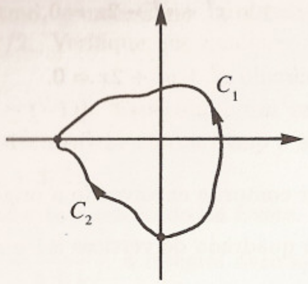

Fig. 3.20

Deixamos ao leitor a tarefa de calcular a integral da mesma função ao longo de um contorno C_2 ilustrado na Fig. 3.20.

3.14. Exemplo. Ainda com referência à Fig. 3.20, vamos calcular a integral de $\sqrt{z}$ ao longo do contorno C_2. Obtemos:

$$\int_{C_2} \sqrt{z}dz = \frac{2}{3}\left[z\sqrt{z}\right]_{C_2} = \frac{2}{3}\left(-\sqrt{-1} + i\sqrt{-i}\right).$$

Para efetuar o cálculo desta última expressão é preciso especificar um ramo da raiz quadrada. Se tomarmos $\sqrt{-1} = i$, teremos $\sqrt{-i} = (-1+i)/\sqrt{2}$, ao passo que se tomarmos $\sqrt{-1} = -i$, teremos $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$. O resultado da integração será

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1 + i(1+\sqrt{2})\right] \quad \text{e} \quad +\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1 + i(1+\sqrt{2})\right],$$

respectivamente.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 11, mostre que são nulas as integrais das funções dadas sobre os contornos C dados. Observe que a orientação de C é irrelevante.

1. $f(z) = \dfrac{z+1}{z-3}$ e C é o círculo $|z| = 2$.
2. $f(z) = \dfrac{3z^2}{z+2i}$ e C é o círculo $|z| = 3/2$.
3. $f(z) = \dfrac{3ze^z}{z^2+3}$ e C é o círculo $|z| = 5/4$.

4. $f(z) = \dfrac{\log(z-2i)}{z+2}$ e C é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

5. $f(z) = \dfrac{\log(z+1)}{z^2-9}$ e C é o círculo $x^2+y^2-2x=0$.

6. $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2-9}$ e C é o círculo $x^2+y^2+2x=0$.

7. $f(z) = \dfrac{\log(z-1+i)}{z^2+9}$ e C é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.

8. $f(z) = 1/z^2$ e C é qualquer contorno envolvendo a origem.

9. $f(z) = \dfrac{ze^z}{\log(2z+3)}$ e C é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.

10. $f(z) = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}$ e C é o círculo $|z| = 1$.

11. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos^3 z}$ e C é o círculo $|z| = 1$.

Nos Exercs. 12 a 15, calcule as integrais das funções dadas sobre os contornos C dados.

12. $f(z) = 1/z$ e C vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

13. $f(z) = 1/z$ e C vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\operatorname{Re} z < 0$.

14. $f(z) = \log z$ e C é qualquer arco que vai de -1 a i e que, à exceção dos extremos, está situado no segundo quadrante. Especifique o logaritmo tomando $\log(-1) = -i\pi$.

15. $f(z) = \sqrt{z+1}$ e C é qualquer arco que vai de $-1-4i$ a $-1+9i$, passando à direita do ponto -1. Especifique a raiz quadrada tomando $f(0) = -1$.

16. Combinando os resultados dos Exercs. 12 e 13, calcule a integral de $f(z) = 1/z$ sobre qualquer contorno fechado simples C envolvendo a origem positivamente.

17. Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R contendo o ponto z_0. Prove que
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0),$$
onde C é qualquer contorno fechado que envolva a origem uma vez no sentido positivo.

18. Mostre que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 0.$

19. Mostre que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0.$

20. Mostre que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-z+iz-i} = 0.$

SUGESTÕES

4. Para especificar o logaritmo, é necessário introduzir algum corte; por exemplo, $-3\pi/2 < \arg(z-2i) < \pi/2$. Verifique que qualquer outro ramo conduz ao mesmo resultado.

5. Veja: $\log(z+1) = \log[z-(-1)]$. Especifique um ramo adequado do logaritmo e verifique que o resultado independe dessa escolha.

9. $\log(2z+3) = \log 2 + \log(z+3/2)$.

17. Utilize o Teorema 3.10 e adapte o resultado do Exerc. 24 da p. 88.

18. Como $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1}\right)$, a integral decompõe-se em duas. Outro modo: utilize o Teorema 3.10 e interprete o integrando como $\dfrac{f(z)}{z-1}$ e como $\dfrac{f(z)}{z+1}$; o que é $f(z)$ em cada caso?

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

3.15. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R. Então,*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$
onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R, que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R.

Demonstração. O resultado aqui enunciado, conhecido como "fórmula integral de Cauchy", é corolário imediato do Exerc. 17 atrás. Para vermos isso, basta trocar a variável z que lá aparece por ζ e trocar z_0 por z.

No entanto, dada a importância dessa fórmula, vamos demonstrá-la detalhadamente. Seja $\delta > 0$ tal que o disco $|\zeta - z| \le \delta$ não contenha pontos de C, como ilustra a Fig. 3.21. Designando por C_δ o contorno desse disco, o Teorema 3.10 permite escrever:
$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$
Vamos escrever esta última integral como soma de duas outras, de acordo com a decomposição
$$f(\zeta) = f(z) + [f(\zeta) - f(z)];$$