e esta expressão mostra que a integral considerada só depende mesmo dos pontos extremos z_1 e z_2 e não do contorno C que liga esses pontos. Em particular, sendo C um contorno fechado, teremos $z_1 = z_2$; portanto,

$$\int_C z dz = 0.$$

Esta propriedade é verdadeira não somente para a função $f(z) = z$, mas para toda função analítica; conhecido como "teorema de Cauchy", esse resultado é, como veremos, a chave de toda a teoria das funções analíticas.

Fig. 3.9

3.3. Observação. A notação $\oint_C f(z)dz$ é usada com freqüência para denotar a integral de $f(z)$ ao longo de um contorno fechado C.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 10, calcule a integral de f ao longo do contorno C, onde f e C são especificados em cada caso.

1. $f(z) = |z|$, $C = \{z = re^{i\theta}:\ 0 \le \theta \le \pi\}$.
2. $f(z) = |z|$, $C = \{z = re^{i\theta}:\ -\pi/2 \le \theta \le \pi\}$.
3. $f(z) = z^2$, $C = \{z = re^{i\theta}:\ 0 \le \theta \le \pi\}$.
4. $f(z) = z^2$, $C = \{z = re^{i\theta}:\ -\pi \le \theta \le \pi\}$.
5. $f(z) = \sqrt{z}$, $C = \{z = re^{i\theta}:\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.
6. $f(z) = \sqrt{z}$, $C = \{z = re^{i\theta}:\ -\pi \le \theta \le \pi\}$.
7. $f(z) = 2x - y + ix^2$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $1 + i$.
8. $f(z) = |z|$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $-2 + 3i$.
9. $f(z) = x^2 - y^2 + i(x - y^2)$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $3 + 2i$.

10. $f(z) = y - x^2$, ao longo do segmento da origem ao ponto (2, 0), seguido do segmento de (2, 0) a (2, 1); depois ao longo de (0, 0) a (0, 1), seguido do segmento de (0, 1) a (2, 1) (Fig. 3.10). Verifique que os resultados são diferentes.

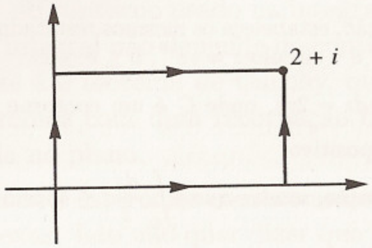

Fig. 3.10

11. Prove as propriedades (3.4) e (3.5).
12. Prove as propriedades (3.9) e (3.10).
13. Prove a propriedade (3.11).
14. Seja C um contorno qualquer, ligando os pontos z_1 a z_2. Mostre que
$$\int_C 1 \cdot dz = z_2 - z_1;$$
portanto, esta integral só depende dos pontos inicial e final, e não do caminho de integração que liga esses dois pontos. Em particular,
$$\oint_C 1 \cdot dz = 0,$$
qualquer que seja o contorno fechado C.
15. Utilizando a definição (3.2), mostre que
$$\int_a^b e^{it} dt = i(e^{ia} - e^{ib}) \quad \text{e} \quad \int_a^b e^{ikt} dt = \frac{i}{k}(e^{ika} - e^{ikb}),$$
onde k é um número real não-nulo.
16. Seja C um arco de círculo parametrizado por $z = z(\theta) = re^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Prove que
$$\int_C f(z)dz = ir \int_\alpha^\beta f(z(\theta))e^{i\theta} d\theta.$$
17. Sejam F e f funções analíticas numa região simplesmente conexa contendo um contorno C, e tais que $f = F'$. Use as equações de Cauchy-Riemann e as definições (3.2) e (3.7) para provar que
$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$
onde z_1 e z_2 são os pontos inicial e final do contorno C, por onde se vê que a integral só depende dos pontos inicial e final, e não de C.

18. Use o resultado anterior para provar que, se n for inteiro e C um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido anti-horário, então
$$\oint_C z^n\,dz = 0 \quad \text{se } n \neq -1 \quad \text{e} \quad \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$
19. Efetuando a integração, estabeleça os mesmos resultados do exercício anterior no caso particular em que C é o círculo $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
20. Mostre que $\displaystyle\oint_C \log z\,dz = 2\pi i$, onde C é um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.
21. Sem efetuar a integração, mostre que $\displaystyle\left|\int_C \frac{dz}{z}\right| \leq 1$, onde C é o segmento retilíneo que une 1 a $1+i$.
22. Mostre que $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+1} \leq \frac{3\pi}{16}$, onde C é o arco de círculo situado no primeiro quadrante, centrado na origem e de raio 3.
23. Mostre que
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} (\log z)^c\,dz = 0,$$
onde C_ε é o contorno $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e c é um número real qualquer.
24. Seja C_r o contorno $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e f uma função contínua na origem. Prove que
$$\lim_{r\to 0}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i f(0).$$

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $-2r^2$. 2. $(i-1)r^2$. 3. $-2r^3/3$. 4. Zero.

5. $-4r\sqrt{r}/3$. 6. $4r\sqrt{r}/3i$. 7. $(1+5i)/6$. 8. $\sqrt{13}(3i-2)/2$.

17. Pondo $F = U + iV$, observe que
$$\begin{aligned} F'(z)z'(t) &= (U_x + iV_x)(x' + iy') = U_x x' - V_x y' + i(V_x x' + U_x y') \\ &= U_x x' + U_y y' + i(V_x x' + V_y y') = \frac{d}{dt}(U + iV). \end{aligned}$$
21. Use (3.12).
22. $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = 8$ para $z \in C$.
23. $|\log\varepsilon + i\theta| \leq 2|\log\varepsilon|$, para ε suficientemente pequeno.
24. Escreva $f(z) = f(0) + [f(z) - f(0)]$ e observe que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(0)| < \varepsilon$.

TEOREMA DE CAUCHY

Como vimos na seção anterior, a integral de uma função entre dois pontos z_0 e z pode ou não depender do contorno usado na integração. Se o integrando é uma função analítica, a integral não depende do contorno, mas apenas dos pontos inicial e final. Este é o teorema de Cauchy, que estudaremos nesta seção. Para isso começaremos com uma recordação do teorema de Green ou teorema da divergência no plano.

Doravante, freqüentemente estaremos considerando funções definidas em regiões simplesmente conexas. Isto não quer dizer que os domínios originais de nossas funções tenham de ser assim; basta notar que as funções podem sempre ser restritas a subdomínios que sejam regiões simplesmente conexas, e é nelas que estaremos fazendo nossas considerações.

Teorema de Green

Quando tratarmos de integrais sobre contornos fechados, teremos de distinguir entre as duas orientações possíveis do contorno, uma das quais é escolhida como a orientação positiva. Não vamos nos ocupar de como a noção de orientação positiva pode ser introduzida rigorosamente, sem apel à intuição geométrica. O importante aqui é acentuar que isto pode se feito, e que, em conseqüência, dado um contorno fechado simples C, d representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, a idéia de que C está orien tado positivamente corresponde exatamente ao fato intuitivo de que, par z_0 interior a C, o argumento de $z(t) - z_0$ cresce de 2π com t variando d $t = a$ a $t = b$. Em linguagem sugestiva, um observador localizado em $z($ percorrerá o contorno C de maneira a deixar o interior de C sempre à su esquerda (Fig. 3.11).

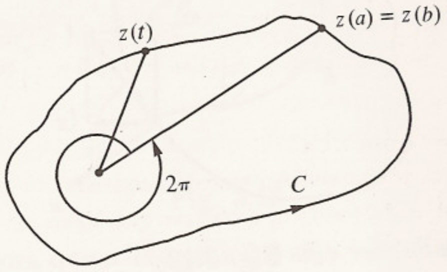

Fig. 3.11